Treppensteigen leicht gemacht

Prozentuale Steigung und Steigungswinkel

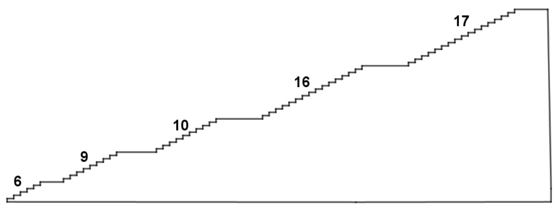
Lösungsvorschlag

Hinweis: Diese Lösung wurde am Treppenaufgang zum Post Tower in Bonn erstellt und stellt lediglich einen Lösungsvorschlag dar. Je nach Lernort weichen die Ergebnisse ab.

In dieser Lösung wird mehrfach die Tangensfunktion verwendet, um einen Winkel im rechtwinklichen Dreieck auszurechnen. Dabei ist $\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$. Wenn man die Tangensfunktion nicht kennt, kann man alternativ die Hypotenuse im Dreieck mithilfe des Satzes des Pythagoras berechnen und anschließend den Winkel α durch Verwendung der Sinusfunktion bestimmen:

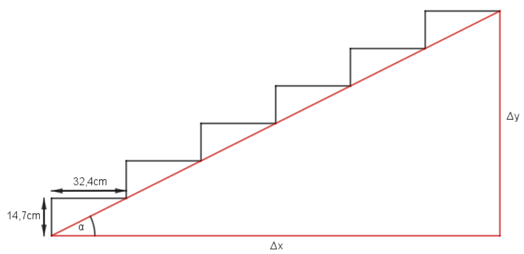
$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

A1 Die Skizze der Treppe in Seitenansicht kann wie folgt aussehen:



Sie zeigt die fünf Treppenabschnitte an und gibt jeweils an, aus wie vielen Treppenstufen sich die Abschnitte zusammensetzen.

A2 Eine Treppenstufe hat eine Höhe von 14,7 Zentimeter und eine Tiefe von 32,4 Zentimeter (vgl. folgende Abbildung).



Die prozentuale Steigung v lässt sich berechnen, indem man den Höhenunterschied Δy durch die horizontale Länge Δx teilt. Für den untersten Treppenabschnitt, der sich aus 6 Treppenstufen zusammensetzt, ergibt sich eine Höhe von:

$$\Delta y = 6 \cdot 14,7 \text{ cm} = 88,2 \text{ cm}$$

und eine horizontale Entfernung von:

$$\Delta x = 6 \cdot 32,4 \text{ cm} = 194,4 \text{ cm}.$$

Somit ergibt sich eine prozentuale Steigung von:

$$v = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{88,2\text{ cm}}{194,4\text{ cm}} \approx 0,454 = 45,4\,\%$$

Mithilfe der Tangens- und der Arcustangensfunktion lässt sich der zugehörige Steigungswinkel berechnen. Für den Steigungswinkel α des ersten Treppenabschnittes erhält man:

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{88,2\text{ cm}}{194,4\text{ cm}}\right) \approx 24,40^\circ$$

Mit diesen Werten kann die erste Zeile der Tabelle ausgefüllt werden:

Höhe Treppenstufe	Tiefe Treppenstufe	Prozentuale Steigung (%)	Steigungswinkel (Grad)	$\frac{\text{Steigungswinkel}}{\text{Prozentuale Steigung}}$
14,7 cm	32,4 cm	45,4 %	$24,4^\circ$	

Die Treppenstufen haben eine Höhe von 14,7 Zentimeter und eine Tiefe von 32,4 Zentimeter. Der Steigungswinkel des untersten Treppenabschnittes beträgt $24,4^\circ$, während die prozentuale Steigung $45,4\,\%$ beträgt.

A3 Die anderen vier Treppenabschnitte haben die gleiche Steigung und somit auch den gleichen Steigungswinkel wie der unterste Treppenabschnitt. Grund dafür ist, dass Steigung immer den Verhältniswert $\frac{\text{Höhenunterschied}}{\text{horizontale Entfernung}}$ angibt. Da jede Treppenstufe die gleichen Maße hat, führt eine beliebige Anzahl an Treppenstufen immer auf die gleiche Steigung. Die prozentuale Steigung ist zugleich der Tangens des Steigungswinkels, sodass sich bei gleich bleibender Steigung der Steigungswinkel entsprechend auch nicht verändert.

B1 Das Schrittmaß variiert je nach Größe eines Menschen. Beim Gehen liegt das Schrittmaß eines durchschnittlichen Erwachsenen zwischen 59 Zentimeter und 65 Zentimeter. Zwei Mal die Höhe plus die Tiefe einer Treppenstufe soll also zwischen 59 Zentimeter und 65 Zentimeter liegen, damit die Schrittmaßregel erfüllt ist. Für unsere Treppe gilt:

$$2 \cdot 14,7\text{ cm} + 32,4\text{ cm} = 61,8\text{ cm}$$

Es gilt: $59\text{ cm} < 61,8\text{ cm} < 65\text{ cm}$. Die Schrittmaßregel wird eingehalten.

B2 Die neue Höhe der Treppenstufe besträgt $14,7\text{ cm} \cdot 0,5 = 7,35\text{ cm}$. Die neue Tiefe der Treppenstufe beträgt $32,4\text{ cm} \cdot 1,25 = 40,5\text{ cm}$. Einsetzen in die Formel für das Schrittmaß liefert:

$$2 \cdot 7,35\text{ cm} + 40,5\text{ cm} = 55,2\text{ cm}$$

Es ist 55,2 cm $<$ 59 cm. Nach der Schrittmaßregel kann die neue Treppe nicht bequem begangen werden.

B3 In Teilaufgabe **A3** haben wir erkannt, dass es egal ist, aus wie vielen Stufen sich ein Treppenabschnitt zusammensetzt. Die prozentuale Steigung und der Steigungswinkel bleiben unverändert. Daher werden die Steigungen jetzt mit der Höhe und Tiefe einer einzelnen Treppenstufe berechnet.

Es ergibt sich eine prozentuale Steigung v von:

$$v = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{7,35 \text{ cm}}{40,5 \text{ cm}} \approx 0,1815 = 18,15\,\%$$

Für den Steigungswinkel α des Treppenabschnittes erhält man:

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{7,35 \text{ cm}}{40,5 \text{ cm}}\right) \approx 10,29°$$

Mit diesen Werten kann die zweite Zeile der Tabelle ausgefüllt werden:

Höhe Treppenstufe	Tiefe Treppenstufe	Prozentuale Steigung (%)	Steigungswinkel (Grad)	$\frac{\text{Steigungswinkel}}{\text{Prozentuale Steigung}}$
14,7 cm	32,4 cm	45,4 %	$24,4°$	
7,35 cm	40,5 cm	18,15 %	$10,29°$	

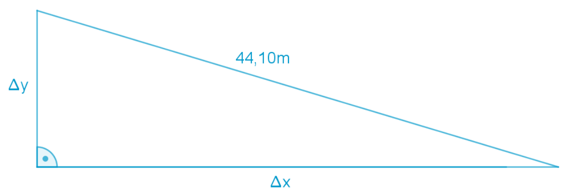
Die prozentuale Steigung der neuen Treppe beträgt 18,15 %. Der Steigungswinkel beträgt $10,29°$.

B4 Man ergänzt nun die letzte Spalte der Tabelle:

Höhe Treppenstufe	Tiefe Treppenstufe	Prozentuale Steigung (%)	Steigungswinkel (Grad)	$\frac{\text{Steigungswinkel}}{\text{Prozentuale Steigung}}$
14,7 cm	32,4 cm	45,4 %	$24,4°$	0,54
7,35 cm	40,5 cm	18,15 %	$10,29°$	0,57

Man sieht, dass die Quotienten nicht übereinstimmen. Die prozentuale Steigung und der Steigungswinkel sind nicht proportional zueinander. Das liegt daran, dass die Umkehrfunktion der Tangensfunktion keine lineare Funktion ist.

C1 Da sich die Rampe aus mehreren Abschnitten zusammensetzt, wurde hier lediglich der oberste Abschnitt betrachtet. Die Länge dieses Abschnittes beträgt 44,10 Meter.



Gesucht ist die prozentuale Steigung, d.h. der Quotient aus der Rampenhöhe Δy und der horizontalen Entfernung Δx. Die Rampenhöhe lässt sich über die Höhe der Treppenstufen ermitteln. Aus Teilaufgabe **A1** ist bekannt, dass der oberste Treppenabschnitt aus 17 Treppenstufen besteht. Jede Stufe hat eine Höhe von 14,7 cm. So ergibt sich:

$$\Delta y = 17 \cdot 14,7 \text{ cm} = 249,9 \text{ cm} = 2,499 \text{ m}$$

Mithilfe des Satzes des Pythagoras lässt sich nun die fehlende Seite Δx bestimmen. Setzt man in die Gleichung

$$(44,10 \text{ m})^2 = (\Delta y)^2 + (\Delta x)^2$$

den bekannten Wert für Δy ein und formt um, so erhält man:

$$(44,10 \text{ m})^2 = (2,499 \text{ m})^2 + (\Delta x)^2$$

und schließlich $(\Delta x)^2 \approx 1938,56$ m^2. Daraus folgt $\Delta x \approx 44,03$ m. Mit den berechneten Werten für den Höhenunterschied und die horizontale Entfernung lässt sich nun die prozentuale Steigung berechnen:

$$\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \frac{2,499\text{ m}}{44,03\text{ m}} \approx 0,0568 = 5,68\,\%$$

Der oberste Rampenabschnitt hat somit eine Steigung von 5,68 %.

C2 Wegen 5,68 % < 6 % ist die Rampe nach der DIN-Vorgabe für Rollstuhlfahrer/-innen geeignet.

C3 Angenommen die prozentuale Steigung der Rampe würde den kritischen Wert von 6% überschreiten. Dann wäre es sinnvoll, die Rampe zu verlängern. Dies ist nur dann baulich umsetzbar, wenn nach hinten genügend Platz verfügbar ist.

Didaktischer Kommentar

Das Thema Steigung, welches in einem geometrischen Kontext im Mathematikunterricht häufig nur am Rande behandelt wird, soll in dieser Aufgabe eine praktische Anwendung finden. Die Begriffe “prozentuale Steigung” und “Steigungswinkel” sollten den Schülerinnen und Schülern bereits bekannt sein.
Zu Beginn (Teilaufgabe **A1**) soll eine Skizze erstellt werden, die die Bearbeitung der folgenden Aufgaben erleichtern kann. Mit Teilaufgabe **A2** erfahren die Schülerinnen und Schüler erste Zusammenhänge zwischen der prozentualen Steigung und dem Steigungswinkel. Das Vorgehen zur Berechnung der Steigung wird dabei als bekannt vorausgesetzt und nicht näher angeleitet. Allerdings kann der vorausgegangene Aufgabenzusatz “Miss die Höhe und die Tiefe einer einzelnen Treppenstufe [...]” als Hilfestellung dienen. Aus den Maßen einer einzelnen Treppenstufe kann mithilfe des Dreisatzes leicht auf die benötigten Werte für die Höhe und die horizontale Länge des Treppenabschnittes geschlossen werden.
Bei der Berechnung des Steigungswinkels in Teilaufgabe **A2** müssen die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass mithilfe der Tangens- beziehungsweise Arcustangensfunktion aus der prozentualen Steigung auf den Steigungswinkel geschlossen werden kann. Vor dem mathematischen Spaziergang sollten somit die trigonometrischen Funktionen, insbesondere die Tangensfunktion und ihre charakteristischen Eigenschaften, thematisiert werden. (Alternativ kann dem Vorschlag aus der Lösung gefolgt werden, statt der Tangensfunktion den Satz des Pythagoras und die Sinusfunktion zu nutzen.)
In Teilaufgabe **A3** können die Schülerinnen und Schüler unter Beweis stellen, dass sie den Begriff der Steigung auf einer abstrakten Ebene verstanden haben. Die offene Formulierung soll Raum für Argumentation geben.
Aufgabenteil **B** bringt die zwei zunächst separat betrachteten Begriffe “prozentuale Steigung” und “Steigungswinkel” in einen Zusammenhang. Mit diesem Aufgabenteil wird das Lernziel verfolgt, dass die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass Steigung und Steigungswinkel nicht proportional zueinander sind, und es somit nicht möglich ist, Steigungen und Steigungswinkel mit einem einfachen Dreisatz ineinander umzurechnen.
Mit Aufgabenteil **C** erhalten die Schülerinnen und Schüler die Möglichkeit, sich noch einmal intensiv mit dem Begriff der Steigung auseinanderzusetzen.
Es bietet sich an, die Aufgabe mit Schülerinnen und Schülern der Sekundarstufe 1 zu behandeln, vorausgesetzt die trigonometrischen Funktionen wurden bereits thematisiert. Aus dem Unterricht sollte den Lernenden bekannt sein, dass die Steigung das Verhältnis zwischen Höhenunterschied und horizontaler Entfernung angibt. Einfache Berechnungen mit dem Dreisatz und Prozentwerten werden ebenfalls vorausgesetzt.