

Der Pakt der Winkel

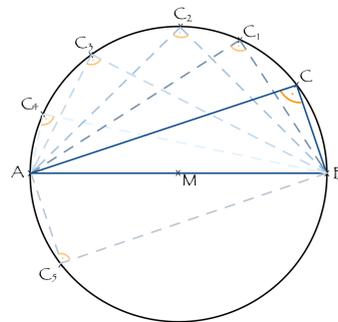
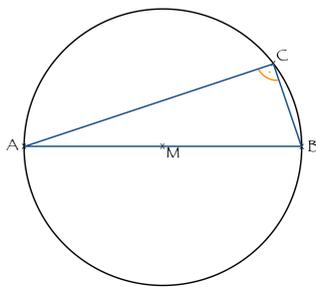
Satz des Thales

Lösungsvorschlag

Hinweis: Diese Aufgabe wurde an einem Brunnen in Bonn erstellt und stellt lediglich einen Lösungsvorschlag dar. Je nach Lernort weichen die Ergebnisse ab.

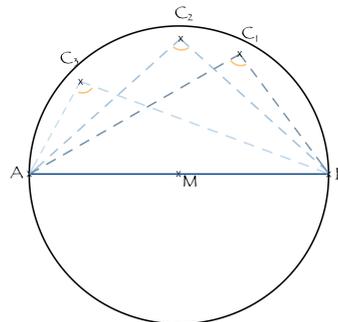
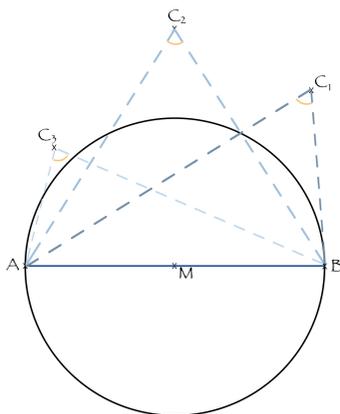
Für die Teilaufgaben **A1**, **A2**, **A3**, **B1** und **B2** sind die Arbeitsaufträge im Folgenden graphisch dargestellt. Dabei stellt der Kreis den Brunnen dar und Schülerinnen und Schüler werden durch die Punkte A , B , C und C_i (mit $i \in \{1, 2, \dots\}$) dargestellt. In diesen Teilaufgaben soll der Winkel an den Punkten C bzw. C_i (mit $i \in \{1, 2, \dots\}$) gemessen werden.

A1/A2/A3



Es konnte durch Messungen festgestellt werden, dass der Winkel bei Person C immer 90° beträgt.

B1/B2

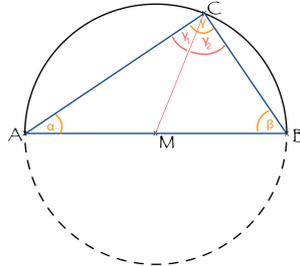


Wenn sich Punkt C_i außerhalb des Kreises befindet, ist der Winkel an Punkt C_i kleiner als 90° . Je weiter sich die Schülerinnen und Schüler C_i von dem Brunnen entfernen, umso kleiner wird auch der Winkel.

Der Winkel an Punkt C_i wird größer als 90° , wenn die Schülerinnen und Schüler ihren Arm über den Brunnenrand strecken und sich Punkt C_i im Inneren des Kreises befindet.

C1 Voraussetzung ist ein Dreieck ABC , für das gilt: C liegt auf dem Kreis mit dem Durchmesser $|\overline{AB}|$.

C2 Die folgende Abbildung zeigt eine für den Beweis des Satz des Thales hilfreiche Skizze.



C3 $\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma$, da \overline{MC} den Winkel γ in γ_1 und γ_2 teilt.

C4 $|\overline{AM}| = |\overline{MB}| = |\overline{MC}|$, denn M ist der Mittelpunkt des Kreises und $|\overline{AM}|$, $|\overline{MB}|$ und $|\overline{MC}|$ sind Radien des Kreises. $\triangle ACM$ und $\triangle BCM$ sind gleichschenkelig.

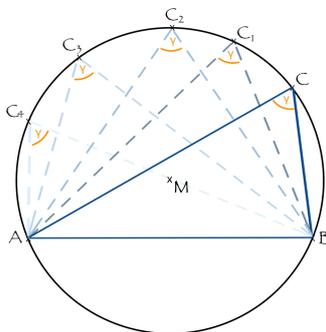
C5 $\gamma_1 = \alpha$ und $\gamma_2 = \beta$ folgt aus der Gleichschenkligkeit von $\triangle ACM$ und $\triangle BCM$ mit dem Basiswinkelsatz.

C6

- $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ Innenwinkelsumme des Dreiecks.
- $\Rightarrow \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma = 180^\circ$ Folgt aus **C5**: $\gamma_1 = \alpha$ und $\gamma_2 = \beta$.
- $\Rightarrow \gamma + \gamma = 180^\circ$ Folgt aus **C3**: $\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma$
- $\Rightarrow 2\gamma = 180^\circ$ Addieren der Winkel.
- $\Rightarrow \gamma = 90^\circ$ Division durch 2 liefert die Behauptung.

D1 Was verändert sich?: Der Winkel an Punkt C ist nicht mehr 90° groß, wenn die Strecke \overline{AB} nicht durch den Mittelpunkt des Brunnens verläuft.

Was bleibt gleich?: Alle Umfangswinkel über demselben Kreisbogen sind gleich groß. Diese Feststellung ist auch bekannt als Umfangswinkelsatz oder Peripheriewinkelsatz.



D2 Um den Kreiswinkelsatz zu veranschaulichen, muss man den Winkel am Mittelpunkt M des Kreises messen können. Das ist bei einem Brunnen, der mit Wasser gefüllt ist, nicht ohne Weiteres möglich, ohne nass zu werden. An dem Mittelkreis auf einem Fußball- oder Basketballfeld oder an einem runden Gullideckel könnte man diesen Winkel beispielsweise leichter nachmessen.

Didaktischer Kommentar

Dieser Mathematische Spaziergang ist auf die Unterrichtsinhalte der Sekundarstufe 1 ausgerichtet. Mit ihm sollen die Schülerinnen und Schüler den Satz des Thales entdecken und beweisen sowie einen Ausblick auf den Umfangwinkelsatz erhalten.

Die Schülerinnen und Schüler sollten bereits Wissen über den Basiswinkelsatz und über die Innenwinkelsumme im Dreieck mitbringen. Der Satz des Thales wird im Rahmen des Spazierganges entdeckt und sollte daher noch nicht im Unterricht behandelt worden sein.

Unter Abänderungen kann der Spaziergang auch an einem runden Karussell, einem Kreis auf einem Fußball- oder Basketballplatz, mit Hula-Hoop-Reifen (aus der Sporthalle) oder an Gullideckeln durchgeführt werden. Der große Brunnen eignet sich jedoch besonders gut, da dort alle Schülerinnen und Schüler genug Platz finden, um die Eigenschaften gemeinschaftlich entdecken zu können.

In den Aufgabenteilen **A** und **B** wird der Satz des Thales nachgestellt und in dem Aufgabenteil **C** wird der Beweis dieses Satzes Schritt für Schritt angeleitet. Anschließend beschäftigen sich die Teilaufgaben **D1** und **D2** sowie die zugehörigen „Wusstest du schon?“-Boxen mit einem Ausblick auf weitere Sätze in einem ähnlichen Kontext.