Einen Sportplatz fair messen

Genormte Strecken und Flächen

Lösungsvorschlag

Hinweis: Diese Lösung wurde an einem Sportplatz in 52499 Baesweiler erstellt und stellt lediglich einen Lösungsvorschlag dar. Je nach Lernort weichen die Ergebnisse ab.

A1 Folgende Messdaten sind auf dem Sportgelände erhoben worden:

Länge des Fußballfeldes: 99,4 Meter	Länge des 5-Meterraumes: 5,5 Meter
Breite des Fußballfeldes: 66,76 Meter	Breite des 5-Meterraumes: 18,32 Meter
Länge des 16-Meterraumes: 16,5 Meter	Höhe des Tores: 2,44 Meter
Breite des 16-Meterraumes: 40,32 Meter	Breite des Tores: 7,32 Meter

A2 Durch die Schrittlängenmethode können Unterschiede zwischen den Normwerten und den Messdaten entstanden sein. Außerdem gibt es einen gewissen Spielraum für die Größe eines Fußballfeldes in Deutschland, sodass sich die hier gemessenen Längen und Breiten von denen an anderen Lernorten unterscheiden können.

A3 Die zu berechnenden Flächen sind Rechtecke. Der Umfang eines Rechtecks U_R mit den Seitenlängen a und b lässt sich wie folgt berechnen:

$$U_\text{R} = 2 \cdot a + 2 \cdot b$$

Mit den Größen aus Teilaufgabe **A1** ergibt sich für den Umfang des gesamten Feldes $U_\text{ges.}$, des halben Feldes U_halb, des 16-Meterraumes U_16m und des 5-Meterraumes U_5m:

$$\begin{aligned}
U_\text{ges.} &= 2 \cdot 99,4\text{ m} + 2 \cdot 66,76\text{ m} = 332,32\text{ m} \\
U_\text{halb} &= 2 \cdot \frac{99,4\text{ m}}{2} + 2 \cdot 66,76\text{ m} = 232,92\text{ m} \\
U_\text{16m} &= 2 \cdot 16,5\text{ m} + 2 \cdot 40,32\text{ m} = 113,64\text{ m} \\
U_\text{5m} &= 2 \cdot 5,5\text{ m} + 2 \cdot 18,32\text{ m} = 47,64\text{ m}
\end{aligned}$$

Der Flächeninhalt eines Rechtecks A_R mit den Seitenlängen a und b lässt sich wie folgt berechnen:

$$A_\text{R} = a \cdot b$$

Mit den Größen aus Teilaufgabe **A1** ergibt sich für den Flächeninhalt des gesamten Feldes $A_\text{ges.}$, des halben Feldes A_halb, des 16-Meterraumes A_16m und des 5-Meterraumes A_5m:

$$\begin{aligned}
A_\text{ges.} &= 99,4\text{ m} \cdot 66,76\text{ m} \approx 6.635,94\text{ m}^2 \\
A_\text{halb} &= \frac{99,4\text{ m}}{2} \cdot 66,76\text{ m} \approx 3.317,97\text{ m}^2 \\
A_\text{16m} &= 16,5\text{ m} \cdot 40,32\text{ m} = 665,28\text{ m}^2 \\
A_\text{5m} &= 5,5\text{ m} \cdot 18,32\text{ m} = 100,76\text{ m}^2
\end{aligned}$$

A4 Den Anteil des jeweiligen Flächeninhaltes P_{i} berechnet man, indem der jeweilige Flächeninhalt A_{i} durch den gesamten Flächeninhalt $A_{\text{ges.}}$ geteilt wird:

$$P_{\text{i}} = \frac{A_{\text{i}}}{A_{\text{ges.}}}$$

Damit ergibt sich für die Anteile:

$$\begin{aligned}
P_{\text{ges.}} &= \frac{6.635,94\,\text{m}^2}{6.635,94\,\text{m}^2} = 1 \equiv 100\% \\
P_{\text{halb}} &= \frac{3.317,97\,\text{m}^2}{6.635,94\,\text{m}^2} = 0,5 \equiv 50\% \\
P_{\text{16m}} &= \frac{665,28\,\text{m}^2}{6.635,94\,\text{m}^2} \approx 0,1003 \equiv 10,03\% \\
P_{\text{5m}} &= \frac{100,76\,\text{m}^2}{6.635,94\,\text{m}^2} \approx 0,0152 \equiv 1,52\%
\end{aligned}$$

A5 Hier wird nach der spielfeldzugewandten Seite des Tores gefragt. Da es sich auch hierbei um ein Rechteck handelt, folgt mit den Größen aus Teilaufgabe **A1**:

$$A_{\text{Tor}} = 7,32\,\text{m} \cdot 2,44\,\text{m} \approx 17,86\,\text{m}^2$$

Die zu treffende Fläche beim Torschuss ist 17,86 Quadratmeter groß.

A6 In diesem Beispiel werden fünf Menschen benötigt, um die Linie zwischen zwei Torpfosten auszufüllen.

B1 Die Sprunggrube kann als Quader aufgefasst werden.

B2 Um die rechteckige Fläche bestimmen zu können, müssen die Länge und die Breite der Sprunggrube gemessen werden:

Länge der Grube L_{G}: 7,87 Meter   Breite der Grube B_{G}: 5,38 Meter

Damit ergibt sich für die Fläche der Sprunggrube A_{G}:

$$A_{\text{G}} = L_{\text{G}} \cdot B_{\text{G}} = 7,87\,\text{m} \cdot 5,38\,\text{m} \approx 42,34\,\text{m}^2$$

Die Fläche, die den Sportlerinnen und Sportlern zur Verfügung steht, um in den Sand zu springen, beträgt 42,34 Quadratmeter.

B3 In dieser Teilaufgabe soll das Volumen bestimmt werden, wenn die Sprunggrube (*hier:* der Quader) vollständig mit Sand befüllt ist. Dazu muss die Tiefe der Grube gemessen werden.

Tiefe der Grube T_{G}: 0,23 Meter

Das Volumen der Sprunggrube V_{G} kann mit der Volumenformel eines Quaders berechnet werden:

$$V_{\text{G}} = L_{\text{G}} \cdot B_{\text{G}} \cdot T_{\text{G}} = 7,87\,\text{m} \cdot 5,38\,\text{m} \cdot 0,23\,\text{m} \approx 9,738\,\text{m}^3$$

Nun müssen die Kubikmeter in Liter umgerechnet werden:

$$1\text{m}^3 = 1.000\,\text{dm}^3 = 1.000\,\text{l}$$

Damit folgt für das Volumen in Litern:

$$V_{\text{G}} = 9,738\,\text{m}^3 = 9.738\,\text{dm}^3 = 9.738\,\text{l}$$

Es befinden sich im Idealfall 9.738 Liter Sand in der Grube.

B4 Analog zu Teilaufgabe **A4** kann der Anteil der individuellen Weite P_{i} mit der Länge der Grube L_{G} und der individuellen Länge L_{i} wie folgt berechnet werden:

$$P_{\text{i}} = \frac{L_{\text{i}}}{L_{\text{G}}} = 100 \cdot \frac{L_{\text{i}}}{L_{\text{G}}}\,\%$$

Beispiel: Mit L_{i} = 3,20 Meter ergibt sich:

$$P_{\text{Sprung}} = \frac{3,20\,\text{m}}{7,87\,\text{m}} \approx 0,4066 = 40,66\,\%$$

C1 Bei dem Experiment sind folgende Daten erhoben worden:

- Umfang des Mittelkreises: 180 Schuhlängen
- Durchmesser des Mittelkreises: 58 Schuhlängen
- Umfang des Kugelstoßkreises: 26 Schuhlängen
- Durchmesser des Kugelstoßkreises: 8 Schuhlängen

C2 Im Folgenden wird die Schuhlänge durch die Variable *S* beschrieben. Es ergeben sich folgende Verhältnisse:

$$\pi_{\text{Mittelkreis}} = \frac{180\,\text{S}}{58\,\text{S}} \approx 3,1034$$
$$\pi_{\text{Kugelstoßkreis}} = \frac{26\,\text{S}}{8\,\text{S}} = 3,25$$

C3 Zunächst werden der Radius des Mittelkreises $r_{\text{Mittelkreis}}$ und der Radius des Kugelstoßkreises $r_{\text{Kugelstoßkreis}}$ als die Hälfte der Durchmesser aus Teilaufgabe **C1** berechnet. Mit einer beispielhaften Schuhlänge von 31,5 Zentimetern ergibt sich:

$$r_{\text{Mittelkreis}} = \frac{d_{\text{Mittelkreis}}}{2} \cdot S = \frac{58}{2} \cdot 31,5\,\text{cm} = 913,5\,\text{cm} = 9,135\,\text{m}$$
$$r_{\text{Kugelstoßkreis}} = \frac{d_{\text{Kugelstoßkreis}}}{2} \cdot S = \frac{8}{2} \cdot 31,5\text{cm} = 126\,\text{cm} = 1,26\,\text{m}$$

Damit lässt sich auch für beide Kreise das Quadrat des Radius berechnen:

$$r^2_{\text{Mittelkreis}} = (9,135\,\text{m})^2 \approx 83,45\,\text{m}^2$$
$$r^2_{\text{Kugelstoßkreis}} = (1,26\,\text{m})^2 \approx 1,59\,\text{m}^2$$

Für eine Schätzung des Flächeninhalts der beiden Kreise muss der Flächeninhalt eines gleichschenkligen Dreiecks einmal für den Mittelkreis und einmal für den Kugelstoßkreis berechnet werden. Ein gleichschenkliges Dreieck hat den Flächeninhalt:

$$A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot s \cdot h$$

Die Höhe h eines gleichschenkligen Dreiecks mit Schenkellänge r und Grundseite s lässt sich wie folgt berechnen:

$$\left(\frac{s}{2}\right)^2 + h^2 = r^2 \quad \Leftrightarrow \quad h = \sqrt{r^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2}$$

Hier soll die Grundseite s die Länge des Schuhs (in unserem Beispiel $31,5\,\text{cm} = 0,315\,\text{m}$) sein, sodass mit den beiden eben berechneten Radien folgt:

$$h_{\text{Mittelkreis}} = \sqrt{r^2_{\text{Mittelkreis}} - \left(\frac{s}{2}\right)^2} = \sqrt{83,45\,\text{m}^2 - \left(\frac{0,315\,\text{m}}{2}\right)^2} \approx 9,13\,\text{m}$$
$$h_{\text{Kugelstoßkreis}} = \sqrt{r^2_{\text{Kugelstoßkreis}} - \left(\frac{s}{2}\right)^2} = \sqrt{1,59\,\text{m}^2 - \left(\frac{0,315\,\text{m}}{2}\right)^2} \approx 1,25\,\text{m}$$

Daraus folgt:

$$A_{\text{Dreieck Mittelkreis}} = \frac{1}{2} \cdot 0,315\,\text{m} \cdot 9,13\,\text{m} \approx 1,44\,\text{m}^2$$
$$A_{\text{Dreieck Kugelstoßkreis}} = \frac{1}{2} \cdot 0,315\,\text{m} \cdot 1,25\,\text{m} \approx 0,2\,\text{m}^2$$

Mit der Anzahl der Schuhlängen S des Umfangs aus Teilaufgabe **C1** ergibt sich für den Flächeninhalt des Kreises:

$$A_{\text{Kreis}} \approx \text{S} \cdot A_{\text{Dreieck}}$$

Somit ergibt sich für den angenäherten Flächeninhalt:

$$A_{\text{Mittelkreis}} \approx 180 \cdot 1,44\,\text{m}^2 = 259,2\,\text{m}^2$$
$$A_{\text{Kugelstoßkreis}} \approx 26 \cdot 0,2\,\text{m}^2 = 5,2\,\text{m}^2$$

C4 Mit den Ergebnissen aus Teilaufgabe **C3** ergeben sich folgende Verhältnisse:

$$\pi_{\text{Mittelkreis}} = \frac{A_{\text{Mittelkreis}}}{r^2_{\text{Mittelkreis}}} = \frac{259,2\,\text{m}^2}{83,45\,\text{m}^2} \approx 3,1061$$
$$\pi_{\text{Kugelstoßkreis}} = \frac{A_{\text{Kugelstoßkreis}}}{r^2_{\text{Kugelstoßkreis}}} = \frac{5,2\,\text{m}^2}{1,59\,\text{m}^2} \approx 3,2704$$

C5 Die Ergebnisse weichen leicht von der Zahl $\pi = 3,14159\ldots$ ab, sodass die nach π umgestellte Formel sinnvoll erscheint. Abweichungen können dadurch entstehen, dass man nur natürliche Zahlen bei der Anzahl der Schuhlängen zulässt. Außerdem ist eine Messung des Flächeninhalts mit der Schuhlänge nur eine Annäherung, da die Schuhe meist gerade sind und somit der Flächeninhalt mit Dreiecken abgeschätzt wurde. Das Ergebnis des Mittelkreises ist genauer, da dieser größer ist.

D1 Um zu testen, ob die Verbindungen der beiden Geraden echte Halbkreise sind, kann man wie folgt vorgehen: Man nimmt an, dass es sich um Halbkreise handelt. Dann muss erfüllt sein, dass vom Mittelpunkt aus alle Punkte auf der Laufbahn gleich weit entfernt sind (auf dem zu untersuchenden Stück). Man kann also den Radius an einer beliebigen Stelle messen und dann an weiteren Punkten auf dem Verbindungsstück der Geraden testen, ob dieser überall gleich ist. Am Beispiellernort liegen folgende Messwerte vor:

$$r_1 = 36,15\,\text{m} \quad r_2 = 36,37\,\text{m} \quad r_3 = 36,49\,\text{m} \quad r_4 = 36,03\,\text{m} \quad r_5 = 36,71\,\text{m}$$
$$r_6 = 36,33\,\text{m} \quad r_7 = 36,71\,\text{m} \quad r_8 = 36,37\,\text{m} \quad r_9 = 36,41\,\text{m} \quad r_{10} = 36,15\,\text{m}$$

Da bei etwa zehn Messungen immer ungefähr dasselbe gemessen wurde, kann davon ausgegangen werden, dass die Verbindungsstrecken zwischen den Geraden echte Halbkreise sind.

D2 Wenn man die Laufbahn in die beiden geraden Teilstücke A_{Gerade} und einen Kreisring $A_{\text{Kreisring}}$ aufteilt, lässt sich der Flächeninhalt der Bahn A_{Bahn} wie folgt bestimmen:

$$A_{\text{Bahn}} = 2 \cdot A_{\text{Gerade}} + A_{\text{Kreisring}}$$

Um das Flächenstück einer Geraden auf der Laufbahn A_{Gerade}, was die Form eines Rechtecks hat, berechnen zu können, muss die Breite B_{Laufbahn} und die Länge des geraden Stückes L_{Gerade} gemessen werden.

Breite der Laufbahn B_{Gerade} : $7,32$ Meter   Länge der Laufbahn L_{Gerade} : $84,63$ Meter

Damit ergibt sich:

$$A_{\text{Gerade}} = B_{\text{Laufbahn}} \cdot L_{\text{Gerade}} = 7,32\,\text{m} \cdot 84,63\,\text{m} \approx 619,49\,\text{m}^2$$

Um $A_{\text{Kreisring}}$ berechnen zu können, kann folgende Formel mit dem Außenradius $r_{\text{außen}}$ und dem Innenradius r_{innen} angewendet werden:

$$A_{\text{Kreisring}} = \pi \cdot ((r_{\text{außen}})^2 - (r_{\text{innen}})^2)$$

Für den Innenradius r_{innen} kann das arithmetische Mittel der Messwerte r_i aus Teilaufgabe **D1** genutzt werden:

$$r_{\text{innen}} = \frac{\sum_{i=1}^{10} r_i}{10} = \frac{36{,}15\,\text{m}+36{,}37\,\text{m}+36{,}49\,\text{m}+36{,}03\,\text{m}+36{,}71\,\text{m}+36{,}33\,\text{m}+36{,}71\,\text{m}+36{,}37\,\text{m}+36{,}41\,\text{m}+36{,}15\,\text{m}}{10} \approx 36,37\,\text{m}$$

Damit kann $r_{\text{außen}}$ wie folgt bestimmt werden:

$$r_{\text{außen}} = r_{\text{innen}} + B_{\text{Laufbahn}} = 36,37\,\text{m} + 7,32\,\text{m} = 43,69\,\text{m}$$

Somit gilt für den Flächeninhalt des Kreisrings $A_{\text{Kreisring}}$:

$$A_{\text{Kreisring}} = \pi \cdot ((43,69\,\text{m})^2 - (36,37\,\text{m})^2) \approx 1.841,1\,\text{m}^2$$

Somit gilt für den Flächeninhalt der Laufbahn:

$$A_{\text{Bahn}} = 2 \cdot 619,49\,\text{m}^2 + 1841,1\,\text{m}^2 = 3.080,08\,\text{m}^2$$

Die Fläche der Laufbahn beträgt 3.080,08 Quadratmeter.

D3 Die innere Bahn ist am kürzesten und die äußere Bahn am längsten. Um die Länge der Bahnen zu bestimmen, braucht man neben den beiden geraden Teilen der Runde auch den Radius des jeweiligen Halbkreises, da dieser den Unterschied zwischen den Längen der Bahnen ausmacht. Mit beliebigem Radius r_{i} gilt für die Länge der i-ten Bahn $L_{\text{Bahn (i)}}$:

$$L_{\text{Bahn (i)}} = 2 \cdot L_{\text{Gerade}} + 2 \cdot \pi \cdot r_{\text{i}}$$

Nun müssen die Radien der inneren und äußeren Bahn bestimmt werden. Da sich auf der Laufbahn sechs Bahnen nebeneinander befinden, ist die Breite einer Bahn $B_{\text{eine Bahn}}$ ein Sechstel der Gesamtbreite.

$$B_{\text{eine Bahn}} = \frac{1}{6} \cdot B_{\text{Laufbahn}} = \frac{1}{6} \cdot 7,32\,\text{m} = 1,22\,\text{m}$$

Da angenommen wird, dass genau in der Mitte der jeweiligen Bahn gelaufen wird, gilt:

$$r_{\text{innere Bahn}} = r_{\text{innen}} + \frac{B_{\text{eine Bahn}}}{2} = 36,37\,\text{m} + \frac{1,22\,\text{m}}{2} = 36,98\,\text{m}$$
$$r_{\text{äußere Bahn}} = r_{\text{außen}} - \frac{B_{\text{eine Bahn}}}{2} = 43,69\,\text{m} - \frac{1,22\,\text{m}}{2} = 43,08\,\text{m}$$

Damit ergibt sich für die Längen der beiden Bahnen:

$$L_{\text{innere Bahn}} = 2 \cdot 84,63\,\text{m} + 2 \cdot \pi \cdot 36,98\,\text{m} \approx 401,61\,\text{m}$$
$$L_{\text{äußere Bahn}} = 2 \cdot 84,63\,\text{m} + 2 \cdot \pi \cdot 43,08\,\text{m} \approx 439,94\,\text{m}$$

$$\Rightarrow \text{Differenz} = |L_{\text{innere Bahn}} - L_{\text{äußere Bahn}}| = |401,61\,\text{m} - 439,94\,\text{m}| = 38,33\,\text{m}$$

Die innere Bahn hat eine Länge von ungefähr 401,61 Metern. Die äußere Bahn hat eine Länge von ungefähr 439,94 Metern. Daraus resultiert, dass die Differenz dieser beiden Strecken 38,33 Meter beträgt.

D4 Da die äußere Bahn circa 40 Meter länger ist als die innere, ist es fair, wenn die Person, die auf der äußeren Bahn läuft, 40 Meter vor der Person auf der inneren Bahn starten darf. Dies lässt sich am besten auf der graden Strecke der Laufbahn abmessen.

Didaktischer Kommentar

Bei diesem Mathematischen Spaziergang sollen sich die Schülerinnen und Schüler mit bekannten Formeln zur Flächen- und Körperberechnung auseinanderzusetzen, diese anwenden und verinnerlichen. Der Spaziergang richtet sich an Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe 1.
Die Aufgabe ist in drei Aufgabenteile unterteilt, welche unabhängig voneinander bearbeitet werden können. Jeder Aufgabenteil benötigt etwa 45 bis 60 Minuten.
In Aufgabenteil **A** beschäftigen sich die Schülerinnen und Schüler mit dem Fußballfeld. Sie sollen Strecken abmessen und auf ihr Wissen zur Flächen- und Umfangberechnung von Rechtecken zurückgreifen. Außerdem müssen Verhältnisse berechnet werden.
In Aufgabenteil **B** werden Berechnungen an einer Sprunggrube durchgeführt. Die Schülerinnen und Schüler sollen in ihr die Form eines Quaders erkennen und Volumen- und Verhältnisberechnungen durchführen.
In Aufgabenteil **C**, welcher für höhere Schulklassen konzipiert wurde, liegt der Fokus auf der Kreiszahl π. Durch Experimente können sich die Schülerinnen und Schüler einfacher merken, wie die Formeln für den Umfang und den Flächeninhalt eines Kreises lauten. Außerdem verstehen sie dadurch, dass das Verhältnis von Umfang zu Durchmesser bzw. von Flächeninhalt zum Quadrat des Radius bei jedem Kreis gleich ist.
In Aufgabenteil **D** wenden sich die SchülerInnen der Laufbahn zu. An ihr wiederholen sie die Definition eines Kreises und die Flächenberechnung von Rechtecken und Kreisringen.