Schätz doch mal!

Fermi-Probleme auf dem Schulhof

Lösungsvorschlag

Hinweis: Bei den für diese Lösung verwendeten Daten handelt es sich um fiktive Angaben. Sie stellen lediglich einen Lösungsvorschlag dar. Je nach Lernort weichen die Ergebnisse ab.

A1 In den folgenden Teilaufgaben geben wir fiktive Schätzwerte für die hier abgebildete Schule an:

Die Breite wird auf 35 Meter und die Höhe auf 10 Meter geschätzt.

A2 Um eine genauere Schätzung abzugeben, wurden folgende Messungen vorgenommen:

- Kleine Fenster unten: Höhe: 50cm, Breite: 70cm
- Große Fenster im Erdgeschoss: Höhe: 1,40m, Breite: 1,20m

In die Breite passen etwa 28 der großen Fenster. Somit ergibt sich eine geschätzte Breite von 33,60 Metern.
In die Höhe passt in etwa vier Mal die Höhe der kleinen Fenster und vier Mal die Höhe der großen Fenster. Damit ergibt sich eine geschätzte Höhe von 7,60 Metern.

Alternativ kann auch die Größe eines Schülers / einer Schülerin gemessen werden, die sich anschließend an die Gebäudefassade stellt und somit als Referenzgröße dient.

A3 Um eine geeignete Schätzung abgeben zu können, muss zunächst geschätzt werden, welche Tiefe das Schulgebäude hat. Als Referenzgröße dient wieder die Größe eines Fensters. In der Breite passen etwa 8 Fenster in die Fassadenseite. Somit ergibt sich eine geschätzte Tiefe von 9,60 Metern. Da nur die Fassade (ohne Dach) gestrichen werden soll, müssen folgende Flächen berücksichtigt werden:

- Fassadenvorder- und rückseite: geschätzte Höhe: 5,60 Meter, geschätzte Breite: 33,60 Meter.
- Fassadenseiten: Diese setzen sich zusammen aus einer rechteckigen Fläche (geschätzte Höhe: 5,60 Meter, geschätzte Breite: 9,60 Meter) und einer dreieckigen Giebelfläche. Mit der Flächenformel für Dreiecke und den vorherigen Schätzungen ergibt sich hierfür eine Fläche von: $0.5 \cdot 9,60\ \text{m} \cdot 2,00\ \text{m} = 9,60\ \text{m}^2$.

Insgesamt kann die zu streichende Flächen damit auf

$$(2 \cdot 5,60 \text{ m} \cdot 33,60 \text{ m}) + (2 \cdot 5,60 \text{ m} \cdot 9,60 \text{ m}) + (2 \cdot 9,60 \text{ m}^2) = 503,04 \text{ m}^2$$

geschätzt werden. Wenn 1 Liter Farbe für 5 Quadratmeter benötigt wird, braucht man 100,608 Liter für den neuen Fassadenanstrich.

A4 Geschätzt passen etwa 6000 Personen in das Schulgebäude (Dachgeschoss vernachlässigt). Auf die ein Quadratmeter große Fläche passen 12 Schülerinnen und Schüler.
Möchte man die maximale Personenanzahl nur grob schätzen, kann man zunächst die Grundfläche der Schule (in Quadratmetern) mit der Anzahl der Stockwerke multiplizieren und diese Fläche anschließend mit 12 multiplizieren. Mit den Schätzungen aus den Teilaufgaben **A2** und **A3** ergibt sich eine Grundfläche von $9,60 \text{ m} \cdot 33,60 \text{ m} = 322,56 \text{ m}^2$. Da die Schule aus 3 Stockwerken besteht und 12 Schülerinnen und Schüler dicht gedrängt auf einen Quadratmeter passen, ergibt sich eine Gesamtanzahl von etwa 11612 Schülerinnen und Schülern.
Möchte man genauer schätzen, so müssen aus der Grundfläche Wände, Treppenhäuser und benötigter Platz für Stühle, Tische und andere Materialien herausgerechnet werden. Sinnvoll kann es sein, die freie Fläche in einem Klassenraum zu schätzen und anschließend zu zählen, wie viele solcher Klassenräume in dem Schulgebäude vorhanden sind.

B1 Es wird geschätzt, dass am Tag etwa 3000 Personen mit einem Fahrrad an dem gewählten Standort vorbeifahren.

B2 In einem Zeitraum von 5 Minuten fahren 12 Fahrradfahrerinnen und Fahrradfahrer an dem Standort vorbei. Eine sehr ungenaue Schätzung erhält man, wenn man die Anzahl von 12 Fahrradfahrerinnen und Fahrradfahrern proportional auf einen gesamten Tag hochrechnet ($288 \cdot 12 = 3456$).
Bei einer guten Schätzung muss berücksichtigt werden, dass zu bestimmten Stoßzeiten (z.B. morgens und nachmittags, wenn viele Menschen zur Arbeit/zur Schule fahren oder von der Arbeit/Schule zurückkommen) sehr viel mehr als 12 Personen mit dem Fahrrad unterwegs sind, während nachts so gut wie gar keine Personen unterwegs sind. Mit dieser Überlegung ergibt sich folgende Schätzung für die Einteilung eines Tages:

- 7.00-9.00 Uhr: Stoßzeit (ca. 20 Personen/5min)
- 9.00 - 15.00 Uhr: Entspanntes Verkehrsaufkommen (ca. 12 Personen/5min)
- 15.00 - 18.00 Uhr: Stoßzeit (ca. 20 Personen/5min)
- 18.00 - 21.00 Uhr: Entspanntes Verkehrsaufkommen (ca. 12 Personen/5min)
- 21.00 - 23.00 Uhr: Kaum Verkehrsaufkommen (ca. 5 Personen/5min)
- 23.00 - 5.00 Uhr : Kein Verkehrsaufkommen
- 5.00 - 7.00 Uhr: Kaum Verkehrsaufkommen (ca. 5 Personen/5min)

Mit dieser Aufteilung ergibt sich eine insgesamt 2736 Personen, die pro Tag den gewählten Standort mit dem Fahrrad passieren.

B3 Es wird vermutet, dass insgesamt 150 Fahrräder vor dem Schulgebäude abgestellt sind.
In einen Fahrradständer stehen 18 Fahrräder. Vor dem Schulgebäude sind 10 dieser Fahrradständer positioniert, sodass diese Schätzung auf eine Zahl von etwa 180 Fahrrädern schließen

lässt. Die erste Schätzung liegt mit einem Unterschied von nur 30 Fahrrädern relativ nah an der zweiten Schätzung. Beide Schätzungen sind ungenau, da nicht alle Fahrradständer mit genau 18 Fahrrädern gefüllt sein mussten.

C1 Unsere Schätzung: Da in der Baumkrone viele Äste mit Astlöchern wachsen und der Stamm oben zu dünn wird, wird für die Produktion der Zahnstocher nur das untere Drittel des Stammes verwendet.
Ein 20 Meter hoher Baum hat in den unteren 7 Metern einen mittleren Stammdurchmesser von 30 Zentimetern. Wir werden nun die Querschnittsfläche des Stammes mit der für die Anfertigung eines Zahnstochers nötigen Querschnittsfläche vergleichen, um die Anzahl der nebeneinanderliegenden Zahnstocherrohstücke zu ermitteln:
Die Querschnittsfläche des Stammes ergibt sich mit $A = r^2 \cdot \pi$ zu $15^2 \cdot 3.14$ cm$^2 \approx 700$ cm$^2 =$ 70.000 mm^2. Ein Zahnstocher hat einen Durchmesser von 2 Millimetern, er wird aus einem kleinen Quader mit quadratischer Grundfläche gefertigt. Da beim Sägen Material verloren geht, rechnen wir pro Zahnstocher mit einer Kantenlänge der Quadergrundfläche von 3 mm. Die Grundfläche eines Zahnstocherrohteils ist also 9 mm^2. Durch Division ergibt sich, dass $\frac{70000}{9} \approx$ 7.800 Zahnstocher nebeneinander in die Querschnittsfläche des Stammes passen. Wenn ein Zahnstocher nun 6 cm lang ist, passen in die 7 Meter Baumstamm etwa $\frac{700}{6} \approx 110$ kreisrunde Scheiben zu je 7.800 Zahnstochern.
Aus dem Stamm können wir also geschätzte $7.800 \cdot 110 \approx 850.000$ Zahnstocher herstellen.
Quelle: https://www.schulkreis.de/info/fermi-baum-zahnstocher.

Didaktischer Kommentar

Thematischer Schwerpunkt dieses mathematischen Spazierganges ist das Schätzen von Größen. Damit kann er idealerweise mit Schülerinnen und Schülern der Sekundarstufe 1 durchgeführt werden. Besondere Vorkenntnisse sind nicht erforderlich. Durchgeführt werden kann der Mathematische Spaziergang auf dem Schulgelände oder an einem anderen gut zugänglichen Gebäude, in dessen Nähe sich eine (nicht zu stark befahrene) Straße und ein Baum befinden. An Materialien werden lediglich Schreibmaterial, ein Maßband, Zahnstocher, sowie Klebeband beziehungsweise ein Stück Kreide zur Markierung einer quadratischen Fläche benötigt.

Im Rahmen dieses mathematischen Spazierganges sollen die Schülerinnen und Schüler lernen, was eine gute Schätzung von einfachem Raten unterscheidet. Dafür verfolgen die Aufgaben jeweils einen Zweischritt. Zunächst sollen die Schülerinnen und Schüler einen Sachverhalt aus dem Bauch heraus schätzen. Im Anschluss sollen sie diese Schätzung selbst überprüfen, indem sie erneut, begründet, anhand von Messungen oder Zählungen schätzen. Das Reflektieren darüber, was eine gute Schätzung von einer nicht so guten Schätzung unterscheidet, wird ebenfalls eingeübt.

Das Bearbeiten von Schätzfragen trainiert Kompetenzen wie das Erforschen, das Überschlagen, das Arbeiten mit großen Zahlen, das Umrechnen von Größen, das Nutzen von Alltagswissen, das Argumentieren und das Kommunizieren. All diese Kompetenzen können die Schülerinnen und Schüler unter Beweis stellen, wenn sie die Teilaufgabe **C1**, eine typische Fermi-Aufgabe, lösen. Nach der Bearbeitung der vorherigen Teilaufgaben **A1** bis **B3** sollten die Schülerinnen und Schüler ausreichende Kenntnisse über eine gute Schätzung erworben haben, um das „komplizierte“ Problem lösen zu können.