Kannst du einen Gang zulegen?

Bruchrechnung am Fahrrad

Lösungsvorschlag

Hinweis: Da die Aufgaben mit Fahrrädern mit unterschiedlich vielen Gängen gelöst werden können, sind vom Lösungsvorschlag abweichende Zahlen möglich.

A1 Folgende Gänge werden in den verschiedenen Situationen gewählt:

- Wenn man schnell fährt und wenig getreten wird, ist ein höherer Gang eingelegt. Das bedeutet das Hinterrad wird relativ schnell angetrieben, der Kraftaufwand ist allerdings höher.
- Bei steilen Steigungen bieten sich kleine Gänge an. Für eine Radumdrehung sind dann mehrere Pedalumdrehungen notwendig; man muss also öfter treten, aber die Anstrengung bei einer Umdrehung ist geringer.
- Wenn die zurückgelegte Strecke trotz häufigem Treten kurz ist, ist ein kleiner Gang eingelegt. Es muss mehrmals getreten werden, damit sich das Hinterrad einmal dreht.

A2 Hier sind individuelle Lösungen möglich. An dem untersuchten Fahrrad befinden sich 12 Zähne am Ritzel und 48 Zähne am Kettenblatt. Wenn sich das Kettenblatt einmal dreht, werden alle 48 Zähne einmal durchlaufen. Da die Drehung des Kettenblatts durch die Fahrradkette Zahn für Zahn auf das Ritzel übertragen wird, müssen am Ritzel ebenfalls 48 Zähne durchlaufen werden. Es gilt $4 \cdot 12 = 48$, beziehungsweise $48 : 12 = 4$, daher dreht sich das Ritzel vier Mal.

A3 Nach Teilaufgabe **A2** dreht sich das Ritzel und damit das Hinterrad bei einer Umdrehung des Kettenblatts vier Mal, wenn die Fahrradkette auf dem kleinsten Ritzel und auf dem größten Kettenblatt liegt. Um das Hinterrad schnell anzutreiben muss kräftig getreten werden.

A4 Die Tabellen enthalten die Übersetzungszahlen einer 24-Gangschaltung.

Tabelle 1: Übersetzungszahlen als gekürzte Brüche

Anzahl der Zähne am Kettenblatt	Anzahl der Zähne am Ritzel							
	32	28	24	21	18	16	14	12
24	$\frac{24}{32} = \frac{3}{4}$	$\frac{24}{28} = \frac{6}{7}$	$\frac{24}{24} = 1$	$\frac{24}{21} = \frac{8}{7}$	$\frac{24}{18} = \frac{4}{3}$	$\frac{24}{16} = \frac{3}{2}$	$\frac{24}{14} = \frac{12}{7}$	$\frac{24}{12} = 2$
36	$\frac{36}{32} = \frac{9}{8}$	$\frac{36}{28} = \frac{9}{7}$	$\frac{36}{24} = \frac{3}{2}$	$\frac{36}{21} = \frac{12}{7}$	$\frac{36}{18} = 2$	$\frac{36}{16} = \frac{9}{4}$	$\frac{36}{14} = \frac{18}{7}$	$\frac{36}{12} = 3$
48	$\frac{48}{32} = \frac{3}{2}$	$\frac{48}{28} = \frac{12}{7}$	$\frac{48}{24} = 2$	$\frac{48}{21} = \frac{16}{7}$	$\frac{48}{18} = \frac{8}{3}$	$\frac{48}{16} = 3$	$\frac{48}{14} = \frac{24}{7}$	$\frac{48}{12} = 4$

Tabelle 2: Übersetzungszahlen als gemischte Zahlen

Anzahl der Zähne am Kettenblatt	Anzahl der Zähne am Ritzel							
	32	28	24	21	18	16	14	12
24	$\frac{3}{4}$	$\frac{6}{7}$	1	$\frac{8}{7}=1\frac{1}{7}$	$\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}$	$\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$	$\frac{12}{7}=1\frac{5}{7}$	2
36	$\frac{9}{8}=1\frac{1}{8}$	$\frac{9}{7}=1\frac{2}{7}$	$\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$	$\frac{12}{7}=1\frac{5}{7}$	2	$\frac{9}{4}=1\frac{5}{4}$	$\frac{18}{7}=2\frac{4}{7}$	3
48	$\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$	$\frac{12}{7}=1\frac{5}{7}$	2	$\frac{16}{7}=2\frac{2}{7}$	$\frac{8}{3}=2\frac{2}{3}$	3	$\frac{24}{7}=3\frac{3}{7}$	4

A5 Die Übersetzung ist klein, wenn das Kettenblatt klein und das Ritzel groß ist. Bei einer Drehung des Kettenblatts dreht sich das Ritzel und damit auch das Hinterrad ebenfalls nur etwa einmal. Daher kommt man relativ langsam vorwärts, das Treten ist aber leicht. Die Übersetzung ist hoch, wenn das Kettenblatt groß und das Ritzel klein ist. Bei einer Umdrehung des Kettenblatts dreht sich das Ritzel und damit auch das Hinterrad mehrfach. Daher fährt man schnell, muss aber schwer treten.

- Wenn ein kleiner Gang eingelegt ist, ist das Kettenblatt klein und das Ritzel groß.
  Die Übersetzung ist dann klein.
- Wenn ein hoher Gang eingelegt ist, ist das Kettenblatt groß und das Ritzel klein.
  Die Übersetzung ist dann groß.

A6 Bei dem Wechsel eines Ganges kann man beobachten, dass die Fahrradkette von einem Ritzel (oder einem Kettenblatt) auf ein anderes größeres oder kleineres Ritzel (oder Kettenblatt) überspringt. Bei Fahrrädern mit zwei Schalthebeln kann mit einem Hebel die Position der Fahrradkette auf dem Ritzel und mit dem anderen Hebel die Position der Fahrradkette auf den Kettenblättern verändert werden.
Der Größenunterschied der Kettenblätter ist deutlich größer als der Größenunterschied der Ritzel. Der Gangwechsel dauert deshalb beim Umlegen des Kettenblatts länger. Hier wird eine grobe Vorauswahl getroffen, die mit der Veränderung der Fahrradkette auf dem Ritzel verfeinert werden kann.

A7 Gleiche und ähnliche Übersetzungen sind in den Tabellen aus Teilaufgabe **A4** farbig markiert. Anhand der Ergebnisse wird deutlich, dass einige Übersetzungen mehrfach vorkommen und von anderen Ritzel-Kettenblatt-Kombinationen (näherungsweise) abgedeckt werden. Wenn beim Schalten beispielsweise die schwarz markierten Übersetzungen sowie jeweils eine farbige Übersetzungszahl jeder Farbe verwendet werden, werden insgesamt 12 unterschiedliche Gänge durchlaufen. Eine Gangschaltung mit 12 verschiedenen Gängen beziehungsweise Übersetzungen reicht also aus. Zusätzlich kann so gewährleistet werden, dass die Fahrradkette nicht zu schräg läuft.

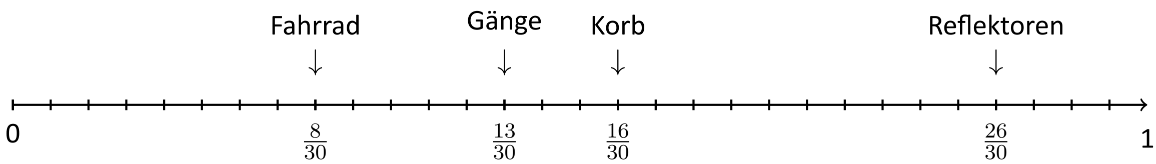
B1 In einem fiktiven Beispiel werden folgende Daten erhoben:

Anzahl aller Kinder	30
Anzahl aller Kinder, die regelmäßig mit dem Fahrrad fahren	8
Anzahl aller Kinder, die einen Fahrradkorb am Fahrrad haben	13
Anzahl alle Kinder, die eine Gangschaltung mit mehr als drei Gängen haben	26
Anzahl aller Kinder, die beim Fahrradfahren Reflektoren an der Kleidung tragen	16

B2 Der Nenner entspricht der Anzahl der Kinder der Klasse, hier 30. Der Zähler entspricht der Anzahl der Kinder, auf die die jeweilige Aussage zutrifft.
Damit ergibt sich

$$\frac{8}{30}, \frac{13}{30}, \frac{26}{30} \text{ und } \frac{16}{30}$$

B3 Der Zahlenstrahl ist 15 Zentimeter lang ($30 : 2 = 15$).



Didaktischer Kommentar

In diesem Mathematischen Spaziergang soll es um das Thema Bruchrechnung gehen, welches anhand der Übersetzung einer Kettenschaltung am Fahrrad erfahren wird.
Ziel ist es, dass die Schülerinnen und Schüler die Funktionsweise einer Gangschaltung verstehen und verschiedene Gänge situationsangemessen nutzen. Am eigenen Fahrrad sollen sie die Wirkung der Übersetzung erkennen und diese im Sachzusammenhang deuten. Zur Interpretation sollen sie ihr Wissen über die Bruchrechnung einsetzen.

Dieser Mathematische Spaziergang kann in der Sekundarstufe 1 durchgeführt werden. Er lässt sich in eine Unterrichtsreihe des Themas Brüche integrieren.
Um die Aufgaben bearbeiten zu können, müssen die Schülerinnen und Schüler bereits sicher in den Bereichen Brüche am Zahlenstrahl, Brüche kürzen und Brüche ordnen arbeiten können. An die Inhalte des Spaziergangs schließt der erweiterte Umgang mit Brüchen an. Anschließend können beispielsweise das Erweitern von Brüchen, die Addition und Subtraktion gleichnamiger und ungleichnamiger Brüche sowie das Vervielfachen oder Aufteilen von Brüchen behandelt werden.
Im Zuge des Spaziergangs nutzen die Schülerinnen und Schüler ihnen bekannte Methoden aus dem Mathematikunterricht, um sich mit der Funktionsweise einer Kettenschaltung am Fahrrad auseinanderzusetzen. Die Realsituation schafft eine Basis für die anschauliche Vertiefung der Bruchrechnung. Damit die Schülerinnen und Schüler die Aufgaben in Kleingruppen bearbeiten können, müssen genügend Fahrräder mit einer Kettenschaltung zur Verfügung stehen.

Aufgabenteil **A** führt die Schülerinnen und Schüler zunächst an den Lerngegenstand heran. Durch das gemeinsame Erproben verschiedener Gänge wird ein einheitlicher Grundkenntnisstand gewährleistet. In der praktischen Auseinandersetzung mit dem Fahrrad erfahren sie welche Bauteile des Fahrrads für eine Kettenschaltung relevant sind und wie diese miteinander in Wechselwirkung stehen. Die Wechselwirkung zwischen den Kettenblättern, dem Ritzelpaket und der Fahrradkette wird mit der Übersetzung formalisiert und mathematisiert.

Der Spaziergang schließt mit einer eigenen Erhebung zum Thema Fahrrad ab. Die zugrundeliegende Umfrage kann, von der Lehrkraft angeleitet, auch schon vor dem Spaziergang durchgeführt werden, damit die Schülerinnen und Schüler kontinuierlich weiterarbeiten können und unterschiedliche Lerngeschwindigkeiten berücksichtigt werden.