Das geometrische Quadrat im Einsatz

Mit Trigonometrie Höhen bestimmen

Lösungsvorschlag

Hinweis: Diese Lösung wurde am Post Tower in Bonn erstellt und stellt lediglich einen Lösungsvorschlag dar. Je nach Lernort weichen die Ergebnisse ab.

A1 Eine sinnvolle Schätzung kann mit Hilfe einer Vergleichsgröße (z.B. Mensch, Fenster, Straßenlaterne) durchgeführt werden. Beispiel für eine konkrete Lösung: Der Post Tower besteht aus 44 übereinanderstehenden Fenstern. Jedes Fenster hat eine Höhe von circa 3,5 Metern. Es ist:

$$44 \cdot 3,5\ \text{m} \ = 154\ \text{m}$$

Der Post Tower ist demnach circa 154 Meter hoch.

A2 Die Messung führt zu einem Winkel von 59 Grad.

A3 Das geometrische Quadrat wurde in einer Entfernung von 100 Metern vom Gebäude aufgestellt.

A4 Gesucht ist die Höhe h. Mithilfe der Tangensfunktion lässt sich folgende Gleichung aufstellen, welche neben der Unbekannten h nur bekannte Größen beinhaltet.

$$\tan(\alpha) = \frac{h}{d} \quad \Leftrightarrow \quad \tan(\alpha) \cdot d = h$$

Einsetzen der bekannten Werte liefert:

$$h = \tan(59^\circ) \cdot 100 \approx 166,43\ \text{m}$$

Die mit dem geometrischen Quadrat gemessene Höhe des Post Towers beträgt circa 166,43 Meter.

B1 Das Erdgeschoss hat eine Höhe von 15,5 Metern. Daneben hat hat der Post Tower 38 Etagen mit einer Höhe von je 3,55 Metern. Die Glasfassade auf dem Dach hat eine Höhe von 12 Metern. So ergibt sich folgende Rechnung für die Höhe:

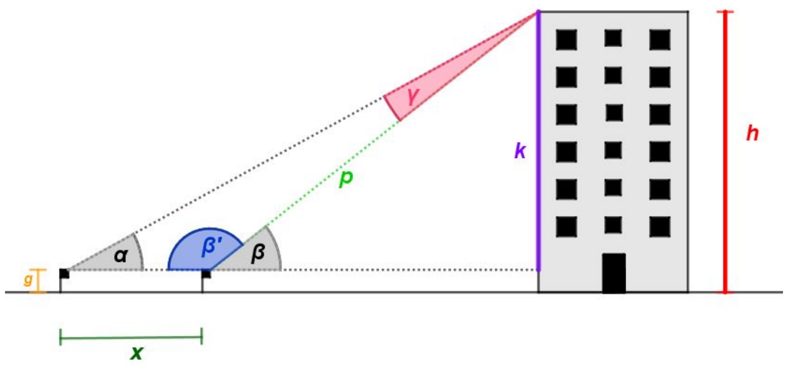
$$15,5\ \text{m} \ + (38 \cdot 3,55\ \text{m}) + 12\ \text{m} \ = 162,40\ \text{m}$$

Bei dieser Schätzung beträgt die Höhe des Post Towers 162,40 Meter. Die Abweichung zu dem mit dem geometrischen Quadrat gemessenen Ergebnis beträgt circa 4,03 Meter. Folgende Gründe können unter anderem zur Abweichung beigetragen haben:

- Die Längen der Strecke d wurde nicht exakt gemessen.
- Beim Ablesen des Winkels wurde das geometrische Quadrat nicht senkrecht gehalten.
- Beim Ablesen des Winkels war das Auge des Messenden nicht auf der Höhe des Strohhalmes.
- Unebenheiten des Bodens

B2 Die Messung führt zu einem Winkel von $\beta = 66$ Grad.

B3 Gesucht ist die Höhe h. Bekannt sind die Winkel α und β, sowie der Abstand x und die Höhe g. Die Herleitung der Formel verfolgt mehrere Schritte. Die folgende Abbildung dient als Visualisierung des Lösungsweges.



Schritt 1: β' berechnen
Es ist:

$$180^\circ = \beta + \beta' \quad \Leftrightarrow \quad \beta' = 180^\circ - \beta$$

Schritt 2: γ berechnen
Nach dem Innenwinkelsummensatz ist $\alpha + \beta' + \gamma = 180^\circ$. Nach Schritt 1 folgt:

$$\begin{aligned} &\alpha + (180^\circ - \beta) + \gamma = 180^\circ \\ \Leftrightarrow\ &\alpha + 180^\circ - \beta - 180^\circ = -\gamma \\ \Leftrightarrow\ &-\alpha + \beta = \gamma \end{aligned}$$

Schritt 3: p berechnen
Nach dem Sinussatz gilt:

$$\frac{p}{\sin(\alpha)} = \frac{x}{\sin(\gamma)} \quad \Leftrightarrow \quad p = \frac{x \cdot \sin(\alpha)}{\sin(\gamma)}$$

Nach Schritt 2 folgt:

$$p = \frac{x \cdot \sin(\alpha)}{\sin(-\alpha + \beta)}$$

Schritt 4: k bestimmen
Mithilfe der Winkelfunktion des Sinus lässt sich k bestimmen:

$$\sin(\beta) = \frac{k}{p} \quad \Leftrightarrow \quad k = \sin(\beta) \cdot p$$

Nach Schritt 3 folgt:

$$k = \frac{x \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)}{\sin(-\alpha + \beta)}$$

Schritt 5: h bestimmen
Zuletzt muss die Höhe g des geometrischen Quadrates hinzuaddiert werden. Somit ergibt sich die gesuchte Formel:

$$h = \frac{x \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)}{\sin(-\alpha + \beta)} + g$$

Nun können die bekannten Werte $\alpha = 59°$, $\beta = 66°$, x = 20 in die Formel eingesetzt werden. Wir verwenden $g = 1,50$ m.

$$h = \frac{20\text{ m } \cdot \sin(59°) \cdot \sin(66°)}{\sin(66° - 59°)} + 1,50\text{ m } \approx 130\text{ m}$$

Mit diesem Verfahren ergibt sich eine Höhe von circa 130 Metern.

B4 Die Höhe des Post Towers beträgt nach Teilaufgabe **B1** um die 162,4 Meter. Mit einer Abweichung von 32,71 Meter ist das Ergebnis aus Aufgabenteil **B** deutlich ungenauer als das aus Aufgabenteil **A**, welches lediglich um 4,03 Meter abweicht. Sowohl in dem Verfahren aus Aufgabenteil **A** als auch in dem aus Aufgabenteil **B** wird der Winkel α gemessen. Da für diese Größen in beiden Verfahren die gleichen Werte verwendet wurden, können diese nicht zur Ungenauigkeit des Ergebnisses aus Aufgabenteil **B** beigetragen haben. In Aufgabenteil **A** musste zusätzlich nur die Länge der Strecke d gemessen werden, während bei dem Vorgehen in Aufgabenteil **B** die Länge der Strecke x, sowie ein weiterer Winkel β bestimmt werden musste. Die Tatsache, dass das Ergebnis aus Aufgabenteil **B** zu einer deutlich größeren Abweichung führt, lässt darauf schließen, dass weniger die Messungenauigkeiten bei den Strecken am Boden, sondern vielmehr die Ungenauigkeiten bei der Verwendung des geometrischen Quadrates zur Irritation des Ergebnisses beigetragen haben.

Didaktischer Kommentar

In dieser Aufgabe sollen die Schülerinnen und Schüler mithilfe ihres selbstgebauten geometrischen Quadrates die Höhe eines Gebäudes ermitteln und ein Gefühl für die Genauigkeit ihrer Messdaten entwickeln. Elementare trigonometrische Beziehungen sollen an einem praktischen Beispiel erfahren werden. Die Aufgabe untergliedert sich in die zwei Aufgabenteile **A** und **B**. Pro Aufgabenteil lernen die Schülerinnen und Schüler eine Vorgehensweise kennen, um mithilfe ihres Messinstrumentes die Höhe des Gebäudes zu bestimmen.
Damit die Höhe des Gebäudes mithilfe des geometrischen Quadrates bestimmt werden kann, ist es von Vorteil, wenn die Schülerinnen und Schüler sich weit genug von dem Gebäude entfernen können, um die Spitze des Gebäudes anpeilen zu können. Besonders geeignet sich daher Kirchen mit weiten Kirchenvorplätzen oder auch Schulgebäude mit großen Schulhöfen.
Falls die Entfernung zum Gebäude nicht gemessen werden kann (weil zum Beispiel eine Straße zwischen Messpunkt und Gebäude liegt, kann die Entfernung auch geschätzt werden).
Das geometrische Quadrat bietet als Vermessungsinstrument zwei große Vorteile: Zum einen kann es aufgrund seiner einfachen Bauart ohne großen Aufwand und mit geringen Kosten hergestellt werden. Zum anderen lernen die Schülerinnen und Schüler mit seinem Gebrauch ein historisches Verfahren kennen, welches vollständig nachvollzogen und vor allem selbstständig durchgeführt werden kann. Dabei kann die Nachhaltigkeit noch gesteigert werden, wenn die Lernenden ein solches Messinstrument selber herstellen. $\rightarrow$ Die Bauanleitung für das geometrische Quadrat finden Sie auf unserer Homepage.
Vor dem Bearbeiten der Aufgabe sollte im Unterricht behandelt werden, wie mithilfe der trigonometrischen Funktionen unbekannte Längen im rechtwinkligen Dreieck bestimmt werden können. Kenntnisse über die Begriffe Sinus, Kosinus, Tangens sowie Ankathete, Gegenkathete und Hypothenuse werden vorausgesetzt. Der Begriff des Winkels sowie die Erkenntnis, dass in einem rechtwinkligen Dreieck das Verhältnis zweier Seitenlängen nur von der Größe eines Winkels abhängt, sollten ebenfalls bekannt sein.
Die Teilaufgaben **A2** sowie **B2** sollen in Gruppenarbeit durchgeführt werden. Die Vermessung

in Dreiergruppen eignet sich hierbei optimal, da ein Lernender die Ausrichtung durch Beobachtung des Lots überwachen kann, während ein anderer das Objekt anvisiert und ein Dritter die Dokumentation der Messwerte vornimmt. Unter Verwendung der Definition des Tangens soll in Teilaufgabe **A4** eine Formel zur Berechnung der Gebäudehöhe entwickelt werden. Die Definition der Winkelfunktion wird dabei als bekannt vorausgesetzt.

Die Teilaufgaben **B2** und **B3** machen darauf aufmerksam, dass trigonometrische Funktionen nicht ausschließlich in rechtwinkligen Dreiecken Anwendung finden. Der Sinussatz wird in der Aufgabenstellung angegeben, sodass die Kenntnis über seinen Inhalt nicht vorausgesetzt wird.

Im Anschluss an diese Aufgabe bietet es sich an, die Thematik auf allgemeine Dreiecke auszuweiten. Neben einer näheren Betrachtung des Sinussatzes ist es möglich, den Kosinussatz durchzunehmen.