Eine schräge Sache!

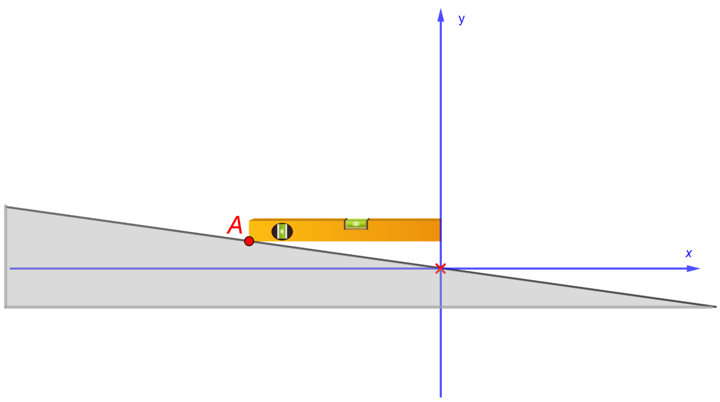
Steigungen und Abstände auf dem Marktplatz

Lösungsvorschlag

*Hinweis: Diese Lösung wurde auf dem Siegburger Marktplatz erstellt und stellt lediglich einen Lösungsvorschlag dar. Je nach Lernort weichen die Ergebnisse ab. Die Lösungen der Aufgabenteile **B** und **C** sind rein fiktiv.*

A1 Da die Blase der Wasserwaage nicht mittig zwischen den beiden Hilfslinien liegt, liegt an dem Lernort eine Steigung vor.

A3 Der Berechnung liegt folgende Skizze zugrunde:



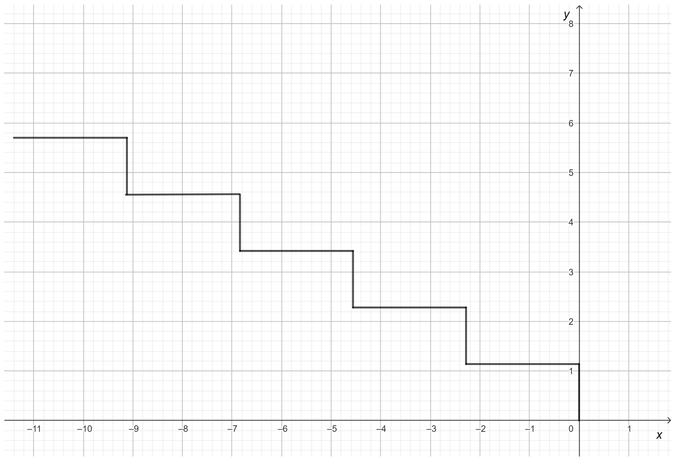
Gesucht ist die Gleichung der in der Skizze schwarz eingezeichneten Geraden. Dazu wurden zunächst die Koordinaten des Punktes A bestimmt (siehe Skizze). Messungen ergeben $A(-6|0,165)$. Die Steigung m der Geraden lässt sich mithilfe des Steigungsdreiecks berechnen. Es gilt:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0,165 - 0}{-6 - 0} = \frac{0,165}{-6} = -0,0275.$$

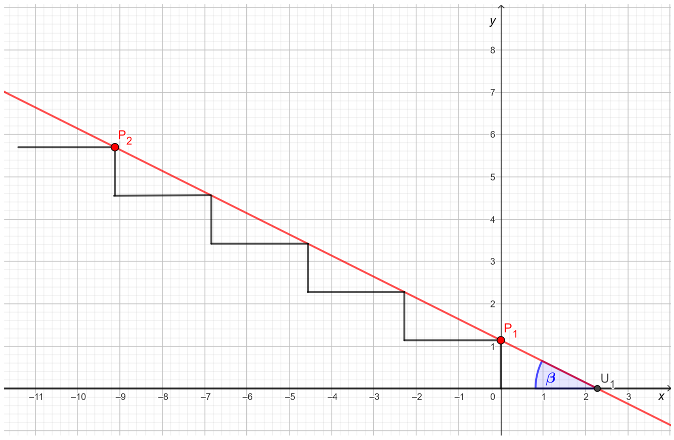
Da die Gerade durch den Koordinatenursprung verläuft, ist der y-Achsenabschnitt $b = 0$. Es folgt die Gleichung $y = -0,0275 \cdot x$.

A4 Die Steigung der Geraden beträgt $\dfrac{0,165}{-6} = -0,0275$. Die prozentuale Steigung beträgt demnach $-2,75$ Prozent. Für den Steigungswinkel α gilt $\tan(\alpha) = \frac{0,165}{-6} = -0,0275$ und damit $\alpha \approx -1,58$ Grad. Der Marktplatz ist abschüssig und verläuft also abwärts mit einem Winkel von etwa $1,58$ Grad.

B1 Die folgende Skizze zeigt den Verlauf der Treppenstufen:



B2 Die Rampe verläuft durch die beiden in der Skizze rot eingezeichneten Punkte. Diese haben die Koordinaten $P_1(0|1,14)$ und $P_2(-9,12|5,7)$.



Mithilfe dieser zwei Punkte lässt sich die Geradengleichung aufstellen. Die allgemeine Gleichung einer Geraden lautet: $y = m \cdot x + b$, wobei m die Steigung und b den y-Achsenabschnitt bezeichnet. Zunächst gilt es die Steigung zu berechnen:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5,7 - 1,14}{-9,12 - 0} = \frac{4,56}{-9,12} = -0.5$$

Der y-Achsenabschnitt der Gerade beträgt $b = 1,14$. Somit lautet die gesuchte Geradengleichung: $y = -0.5x + 1,14$.

B3 Der Winkel β, den die Gerade der Rampe mit der x-Achse einschließt, lässt sich mithilfe des Tangens berechnen. Es gilt $\tan(\beta) = 0,5$. (Wir benötigen hier den Anstieg 0,5 statt -0,5, weil wir sonst einen negativen Winkel gleicher Größe erhalten. Aus Symmetriegründen ist das auch kein Problem.) Daraus folgt $\beta \approx 26,57°$. Der Winkel zwischen Rampe und x-Achse beträgt demnach circa $26,57°$.

B4 Nein, eine solche Rampe wäre zu steil für Rollstuhlfahrende. Es bestünde die Gefahr, dass Fahrende nach hinten kippen oder ihnen schlicht die Kraft fehlt, die Rampe zu befahren.

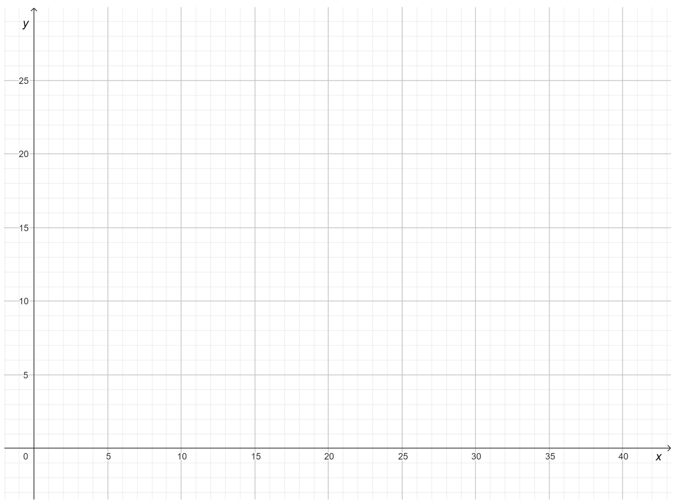
B5 Um zu entscheiden, ob eine Rampe mit sechs Prozent Steigung verwirklicht werden könnte, muss berechnet werden, wie lang die Rampe bei der angegebenen Steigung wäre und wo diese dementsprechend enden würde. Die horizontale Länge der neuen Rampe wird im Folgenden mit x bezeichnet. x lässt sich leicht mithilfe eines Steigungsdreiecks berechnen. Es gilt:

$$\frac{5,7}{x} = 0,06 \quad \Leftrightarrow \quad 5,7 = 0,06x \quad \Leftrightarrow \quad x = 95$$

Da der Koordinatenursprung beim Treppenabsatz liegt, muss von den 95 Metern noch die (horizontale) Länge der Treppe abgezogen werden: $95 - 11,4 = 83,6$. Gemessen vom Fuß der Treppe würde die neue Rampe also 83,6 Meter in den Platz hineinragen. Am Lernort wäre dies nicht umzusetzen, da die Rampe nicht nur eine Straße kreuzen, sondern sogar bis hinter die Häuserfront der nebenstehenden Gebäude ragen würde.

B6 Man könnte die Rampe verwirklichen, indem man sie an der Gebäudewand entlang um das Haus herumführen lassen würde. Außerdem bestünde die Möglichkeit, die Rampe in Zickzackform zu bauen.

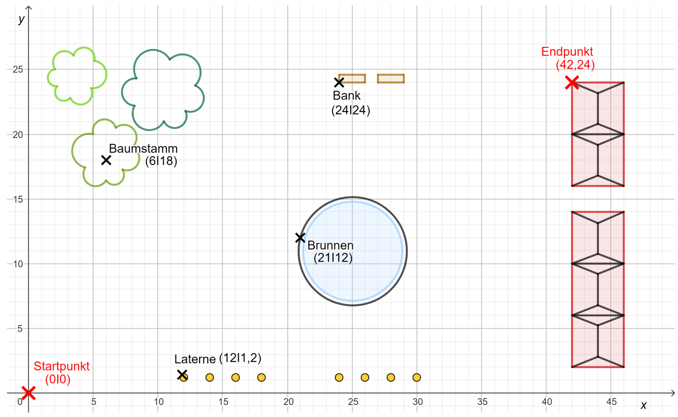
C1 Ein mögliches Koordinatensystem kann wie folgt aussehen:



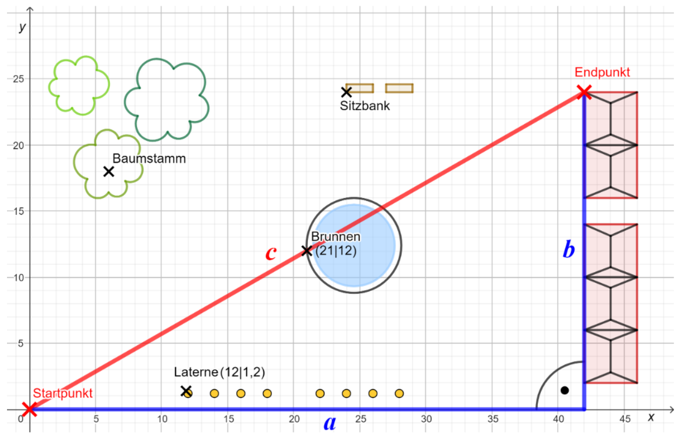
Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht dabei einem Meter in der Wirklichkeit.

C2 Es wurde drei Mal die Schrittlänge gemessen und anschließend der Durchschnitt berechnet.
Messung 1: 61 cm
Messung 2: 57 cm
Messung 3: 62 cm
Durchschnitt: $\frac{61+57+62}{3} = 60$
Die durchschnittliche Schrittlänge beträgt somit 60 Zentimeter.

C3 Die Koordinaten der verschiedenen Punkte sind der folgenden Abbildung zu entnehmen:



C4 Mithilfe des Satzes des Pythagoras kann der Abstand zwischen dem Start- und Endpunkt berechnet werden. Betrachte dafür die folgende Abbildung:



Gesucht ist die Länge der Strecke c. Es gilt:

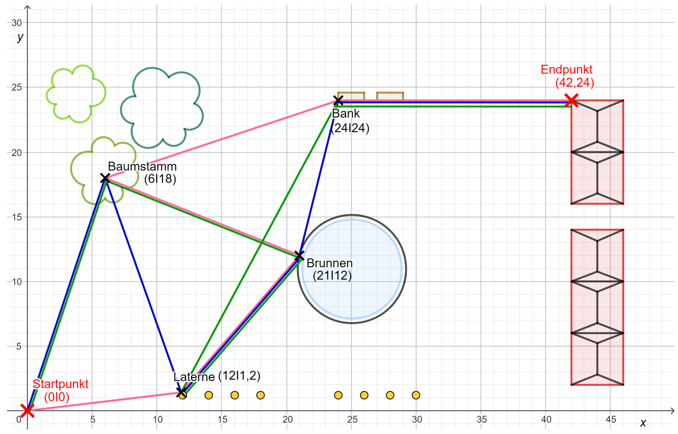
$$a^2 + b^2 = c^2$$

Durch die Koordinaten des Start- und Endpunktes sind die Längen der Strecken a und b bekannt. Setze also für $a = 42$ und für $b = 24$ ein. Es folgt:

$$42^2 + 24^2 = c^2 \quad \Leftrightarrow \quad 1764 + 576 = c^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2340 = c^2 \quad \text{und damit} \quad c \approx 48,37$$

Die Strecke vom Start- zum Endpunkt hat somit eine Länge von etwa 48,37 Metern. Es ist nicht möglich, über diese Strecke vom Start- zum Endpunkt zu gelangen, da sich der Brunnen im Weg befindet.

C5 Die drei verschiedenen Wege vom Start- zum Endpunkt sind im Koordinatensystem farblich dargestellt:



Im Folgenden sollen für die verschiedenen Punkte folgende Bezeichnungen gelten:
Startpunkt: S Laterne: L Brunnen: B_1 Baumstamm: B_2 Bank: B_3 Endpunkt: E

C6 Es gilt: Weg 1: $\overrightarrow{SL} + \overrightarrow{LB_1} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{B_2B3} + \overrightarrow{B_3E}$

Weg 2: $\overrightarrow{SB_2} + \overrightarrow{B_2L} + \overrightarrow{LB_1} + \overrightarrow{B_1B_3} + \overrightarrow{B_3E}$

Weg 3: $\overrightarrow{SB_2} + \overrightarrow{B_2B_1} + \overrightarrow{B_1L} + \overrightarrow{LB_3} + \overrightarrow{B_3E}$

Folgende Weglängen wurden mithilfe des Satzes des Pythagoras berechnet:
$|\overrightarrow{SL}| = \sqrt{12^2 + 1,2^2} = \sqrt{144 + 1,44} = \sqrt{145,44} \approx 12,06$

$|\overrightarrow{LB_1}| = \sqrt{(21-12)^2 + (12-1,2)^2} = \sqrt{9^2 + 10,8^2} = \sqrt{81 + 116,64} = \sqrt{197,64} \approx 14,06$

$|\overrightarrow{B_1B_2}| = \sqrt{(21-6)^2 + (18-12)^2} = \sqrt{15^2 + 6^2} = \sqrt{225 + 36} = \sqrt{261} \approx 16,16$

$|\overrightarrow{B_2B_3}| = \sqrt{(24-6)^2 + (24-18)^2} = \sqrt{18^2 + 6^2} = \sqrt{324 + 36} = \sqrt{360} \approx 18,97$

$|\overrightarrow{SB_2}| = \sqrt{6^2 + 18^2} = \sqrt{36 + 324} = \sqrt{360} \approx 18,97$

$|\overrightarrow{B_2L}| = \sqrt{(12-6)^2 + (18-1,2)^2} = \sqrt{6^2 + 16,8^2} = \sqrt{36 + 282,24} = \sqrt{318,24} \approx 17,84$

$|\overrightarrow{B_1B_3}| = \sqrt{(24-21)^2 + (24-12)^2} = \sqrt{3^2 + 12^2} = \sqrt{9 + 144} = \sqrt{153} \approx 12,37$

$|\overrightarrow{B_3E}| = \sqrt{(42-24)^2 + (24-24)^2} = \sqrt{18^2} = 18$

$|\overrightarrow{LB_3}| = \sqrt{(24-12)^2 + (24-1,2)^2} = \sqrt{12^2 + 22,8^2} = \sqrt{144 + 519,84} = \sqrt{663,84} \approx 25,77$

Nun müssen die Längen der einzelnen Teilstrecken nur noch addiert werden.

Für Weg 1: $|\overrightarrow{SL}| + |\overrightarrow{LB_1}| + |\overrightarrow{B_1B_2}| + |\overrightarrow{B_2B_3}| + |\overrightarrow{B_3E}| \approx 12,06 + 14,06 + 16,16 + 18,97 + 18 = 79,25$

Für Weg 2: $|\overrightarrow{SB_2}|+|\overrightarrow{B_2L}|+|\overrightarrow{LB_1}|+|\overrightarrow{B_1B_3}|+|\overrightarrow{B_3E}| \approx 18,97+17,84+14,06+12,37+18 = 81,24$

Für Weg 3: $|\overrightarrow{SB_2}|+|\overrightarrow{B_2B_1}|+|\overrightarrow{B_1L}|+|\overrightarrow{LB_3}|+|\overrightarrow{B_3E}| \approx 18,97+16,16+14,06+25,77+18 = 92,96$

Es zeigt sich also, dass Weg 3 mit einer Länge von circa 92,96 Metern am längsten ist und Weg 1 mit einer Länge von 79,25 Metern am kürzesten.

Didaktischer Kommentar

Dieser Mathematische Spaziergang richtet sich an Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe 1 und benötigt als Lernort einen (Markt-)Platz oder eine nicht zu stark frequentierte Fußgängerzone mit Steigung. Für Aufgabenteil **B** sollte sich ein Treppenaufgang in unmittelbarer Nähe befinden.

In Aufgabenteil **A** nehmen die Lernenden Messungen am Lernort vor und bestimmen auf deren Grundlage die Steigung des Lernortes. Vorausgesetzt wird die Kenntnis über das Aufstellen von Geradengleichungen, die Berechnung des Steigungswinkels und der prozentualen Steigung. Bei der Berechnung des Steigungswinkels in Teilaufgabe **A4** müssen die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass mithilfe der Tangens- beziehungsweise Arcustangensfunktion aus der prozentualen Steigung auf den Steigungswinkel geschlossen werden kann. Vor dem Mathematischen Spaziergang sollten somit die trigonometrischen Funktionen, insbesondere die Tangensfunktion und ihre charakteristischen Eigenschaften, thematisiert werden.
In Aufgabenteil **B** müssen die Schülerinnen und Schüler Messungen an der nahegelegenen Treppe vornehmen. Auch hier müssen Geradengleichungen aufgestellt und unter Verwendung der Tangensfunktion Steigungen berechnet werden.
In Aufgabenteil **C** sollen sich die Lernenden über den Platz beziehungsweise die Fußgängerzone bewegen und ihre Laufwege mathematisch beschreiben. Dazu gilt es den Lernort zunächst in einem zweidimensionalen Koordinatensystem darzustellen und markante Wegpunkte (wie zum Beispiel Fahrradständer, Mülleimer, Bäume etc.) einzuzeichnen. Um abschließend herauszufinden, welcher Weg vom Start- zum Zielpunkt am längsten bzw. am kürzesten ist, müssen die Schülerinnen und Schüler Längen von Strecken berechnen. Wie mithilfe des Satz des Pythagoras die Länge von Strecken zwischen zwei Punkten berechnet werden kann, sollte aus dem vorherigen Unterricht bekannt sein.

Neben Schreibmaterial werden zur Bearbeitung der Aufgabe ein Taschenrechner, eine (möglichst lange) Wasserwaage, Kreide und ein Maßband benötigt.