Jede Menge Holz

Mit Geometrie in den Schatten gestellt

Lösungsvorschlag

Hinweis: Diese Lösung wurde an einer Stieleiche im Botanischen Garten der Universität Bonn erstellt und stellt lediglich einen Lösungsvorschlag dar. Je nach Lernort weichen die Ergebnisse ab.

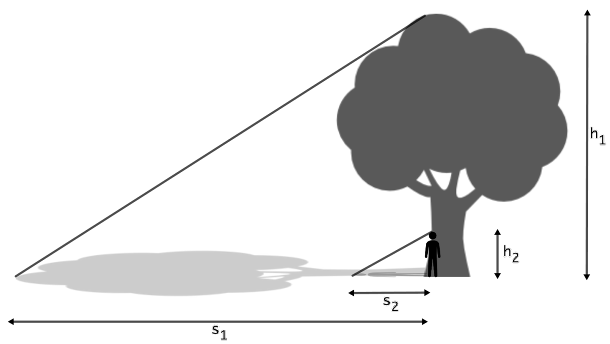
A1 Bei dem betrachteten Baum handelt es sich um eine Stieleiche. Typisch für eine Stieleiche ist ein kurzer Stamm und eine lichte Krone. Die Blätter sind oval bis verkehrt eiförmig, mehrfach stumpf gelappt und haben kurze Stiele.

A2 Die gesuchte Baumhöhe sei h_1. Nach dem 1. Strahlensatz gilt: $\frac{h_1}{h_2} = \frac{s_1}{s_2}$

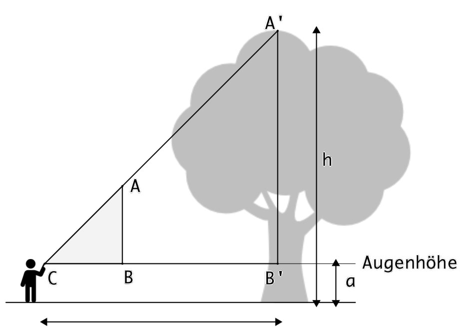
Bei einem 1,58 m großen Menschen, der einen 1,185 m langen Schatten wirft, während der Baum einen Schatten von 19,6 m wirft, gilt:

$$\frac{h_1}{1,58 \text{ m}} = \frac{19,6 \text{ m}}{1,185 \text{ m}} \Rightarrow h_1 = \frac{19,6 \text{ m}}{1,185 \text{ m}} \cdot 1,58 \text{ m} \approx 26,13 \text{ m}$$

Die Stieleiche hat eine Größe von etwa $26,13$ Metern.



A3



Die gesuchte Baumhöhe sei h. Die beiden Katheten des Geodreiecks haben jeweils die Länge $15,5$cm. Eine Messung ergibt z.B. $a = 1,50$ m und $\overline{CB'} = 24,60$ m.
Es gilt $h = \overline{A'B'} + a$ und nach dem 2. Strahlensatz $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{CB'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CB}}$.
Daraus folgt $\frac{\overline{A'B'}}{24{,}60 \text{ m}} = \frac{15{,}5 \text{ cm}}{15{,}5 \text{ cm}}$ und also $\overline{A'B'} = 24,60$ m.
Wir erhalten $h = 24,60$ m $+ 1,50$ m $= 26,10$ m.

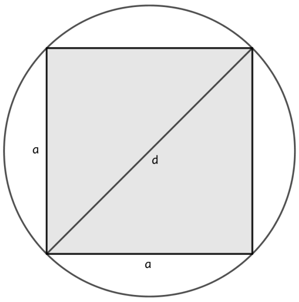
Mit dieser Methode erhalten wir eine Baumhöhe von $26,10$ Metern.

B1 Es wurden folgende Umfänge gemessen: 310 cm, 310,3 cm und 310,8 cm. Damit folgt für den durchschnittlichen Umfang $U_{\text{Stamm}} = \frac{1}{3} \cdot (310\text{ cm} + 310,3\text{ cm} + 310,8\text{ cm}) \approx 310,37\text{ cm}$. Der durchschnittliche Stammumfang (basierend auf den Messwerten) beträgt 310,37 Zentimeter.

B2 Der Baumstamm kann näherungsweise als Zylinder betrachtet werden. Es gilt $d = \frac{U_{\text{Stamm}}}{\pi}$ und $r = \frac{1}{2} \cdot d$. Wir erhalten $d = \frac{310{,}37\text{ cm}}{\pi} \approx 98,79\text{ cm}$ und $r = \frac{98{,}79\text{ cm}}{2} \approx 49,40\text{ cm}$ sowie $V_{\text{Stamm}} = \pi \cdot (49,40\text{ cm})^2 \cdot 200\text{ cm} \approx 1533323,41\text{ cm}^3 \approx 1533\text{ dm}^3$.

Der Durchmesser d beträgt ungefähr 98,79 Zentimeter und der Radius r etwa 49,40 Zentimeter. Das Teilstück des Baumstamms umfasst ein Volumen von ungefähr 1533 Liter.

B3 Das Volumen des quadratischen Balkens ist maximal, wenn die Deckfläche maximal ist.



Eine mögliche Vorgehensweise verwendet den Satz des Pythagoras. Es gilt $d^2 = a^2 + a^2 = 2 \cdot a^2$ und $V_{\text{Stamm}} = a \cdot a \cdot h = a^2 \cdot h$.

Wir erhalten $2 \cdot a^2 = (98,79\text{ cm})^2 = 9759,46\text{ cm}^2$. Daraus folgt $a^2 = 4879,73\text{ cm}^2$ und schließlich $a = \sqrt{4879,73\text{ cm}^2} \approx 69,85\text{ cm}$.

Es gilt $V_{\text{Stamm}} = (69,85\text{ cm})^2 \cdot 200\text{ cm} = 975804,5\text{ cm}^3 \approx 976\text{ dm}^3 = 0,976\text{ m}^3$.
Das Volumen des quadratischen Balkens beträgt ungefähr 0,976 Kubikmeter.

B4 Die Stieleiche hat eine durchschnittliche Rohdichte von 0,71 Gramm pro Kubikzentimeter. Die Dichte ist der Quotient aus Masse und Volumen, d.h. $m = \rho \cdot V$. Wir erhalten $m = 0,71\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot 0,976\text{ m}^3 = 710\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 0,976\text{ m}^3 = 692,96\text{ kg}$

Die Masse des quadratischen Balkens beträgt ungefähr 692,96 Kilogramm.

C1 Die Dicke der Rinde beträgt etwa 2 Zentimeter ($d_{\text{Rinde}} = 2\text{ cm}$). Es gilt

$$V_{\text{Rinde}} = \pi \cdot (r^2 - (r - d_{\text{Rinde}})^2) \cdot h$$

Daher folgt $V_{\text{Rinde}} = \pi \cdot ((49,40\text{ cm})^2 - (47,40\text{ cm})^2) \cdot 200\text{ cm} \approx 121642,47\text{ cm}^3 \approx 122\text{ dm}^3 = 0,122\text{ m}^3$. Das Volumen der Rinde des Teilstücks beträgt ungefähr 0,122 Kubikmeter.

C2 Die Vermessung des Weinkorkens liefert folgende Maße: Höhe $h_K = 4,5\text{ cm}$, Radius $r_K = 1,2\text{ cm}$. Es gilt $V_{\text{Korken}} = \pi \cdot r_K^2 \cdot h_K$. Daher folgt $V_{\text{Korken}} = \pi \cdot (1,2\text{ cm})^2 \cdot 4,5\text{ cm} \approx 20,36\text{ cm}^3$ und $\frac{V_{\text{Rinde}}}{V_{\text{Korken}}} = \frac{121642{,}47\text{ cm}^3}{20{,}36\text{ cm}^3} \approx 5975$. Mit der Rinde des Teilstücks können etwa 5975 Weinflaschen verschlossen werden.

Didaktischer Kommentar

Inhaltlich lässt sich diese Aufgabe in den Kontext des Geometrieunterrichts der Sekundarstufe 1 einordnen.
Die Schülerinnen und Schüler sollen mit verschiedenen Methoden die Höhe eines Baumes ermitteln. Die Bearbeitung der Teilaufgaben **A2** und **A3** setzt voraus, dass über ein grundlegendes Verständnis von Längenverhältnissen verfügt wird. Die Strahlensätze sind somit von der Lehrkraft vorab einzuführen und einzuüben. Teilaufgabe **A2** lässt die Schülerinnen und Schüler die sogenannte *Schattenmethode* verwenden. Diese Methode kann nicht durchgeführt werden, wenn es bewölkt ist. In diesem Fall ist eine Zeichnung anzufertigen und mithilfe dieser eine Gleichung aufzustellen, mit der die Baumhöhe ermittelt werden kann. Baumhöhen können außerdem mithilfe eines gleichschenkligen Dreiecks, dem sogenannten *Försterdreieck*, bestimmt werden. Diese Methode ist in Teilaufgabe **A3** anzuwenden. Das Anfertigen einer Zeichnung soll hierbei dem Lernenden helfen, die gesuchte Größe zu ermitteln.
Die Schülerinnen und Schüler sollen vorab in der Lage sein, den Umfang von Kreisen sowie das Volumen von Zylindern zu ermitteln. Zunächst sollen sie einen Schätzwert für den mittleren Stammumfang des Baumes angeben (**B1**), um im Anschluss sowohl den Durchmesser d als auch den Radius r des Baumstammes zu berechnen (**B2**). Außerdem lässt Teilaufgabe **B2** die Lernenden das Volumen des Baumstamms vom Boden bis zu einer Höhe von zwei Metern berechnen.
Bei Teilaufgabe **B3** handelt es sich um ein sogenanntes Extremwertproblem, genauer um ein Maximierungsproblem. Das größtmögliche Volumen des quadratischen Balkens, das aus dem Baumstamm gewonnen werden kann, soll bestimmt werden. Hierfür müssen die Schülerinnen und Schüler mit dem Satz des Pythagoras vertraut sein. Am besten sollte sich die Lehrkraft vor dem Spaziergang darüber informieren, welche Rohdichte das Holz des Baumes pro Kubikzentimeter hat, damit Teilaufgabe **B4** von den Schülerinnen und Schülern gelöst werden kann.
Bei Teilaufgabe **C1** ist das Volumen der Baumrinde zu ermitteln. Die Schülerinnen und Schüler sollen hierbei erkennen, dass das Volumen der Rinde als Differenz zweier Zylindervolumen betrachtet werden kann.
Bei Teilaufgabe **C2** bietet die Tatsache, dass die Rinde von Korkeichen zum Verkorken von Weinflaschen genutzt wird, einen Bezug zu Realsituationen. Es wird erwartet, dass der Lernende die Aufgabe in Teilaufgaben zerlegt. Zunächst ist das Volumen eines Weinkorkens zu bestimmen, welcher von der Lehrperson mitgebracht wird. Um dann zu ermitteln, wie viele Korken dieser Größe aus der Rinde des Baumes produziert werden könnten, muss auf die Lösung der Teilaufgabe **C1** zurückgegriffen werden.