Eine gute Figur abgeben

Mathematik an der Minigolfanlage

Lösungsvorschlag

Hinweis: Diese Aufgabe wurde an einer Minigolfanlage in Bonn Bad-Godesberg erstellt und stellt lediglich einen Lösungsvorschlag dar. Je nach Lernort weichen die Ergebnisse ab.

A2 Der mithilfe des Maßbandes gemessene Umfang des Balles beträgt

$$U_{\text{Ball}} = 12{,}8\text{ cm}$$

Um daraus den Radius zu ermitteln, wird der Umfang in die entsprechende Formel eingesetzt und nach dem Radius r_{Ball} umgeformt. Es ergibt sich

$$U_{\text{Ball}} = 2\pi r \quad \Rightarrow \quad 12{,}8\text{ cm} = 2\pi r \quad \Rightarrow \quad 2{,}04\text{ cm} \approx r$$

Mithilfe des Radius lässt sich nun das Volumen des Balls bestimmen:

$$V_{\text{Ball}} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot (2{,}04\text{ cm})^3 \approx 35,56\text{ cm}^3.$$

Damit hat der Minigolfball ein Volumen von ungefähr 35,56 Kubikzentimetern.

A3 Die Masse des Minigolfballs m_{Ball} beträgt

$$m_{\text{Ball}} = 44\text{ g}$$

A4 Entsprechend der gegebenen Gleichung ergibt sich eine Dichte von

$$\rho_{\text{Ball}} = \frac{m_{\text{Ball}}}{V_{\text{Ball}}} = \frac{44\text{ g}}{35{,}56\text{ cm}^3} \approx 1{,}24\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}.$$

Der Minigolfball hat somit ein Dichte von ungefähr $1{,}24$ Gramm je Kubikzentimeter.

A5 Verglichen mit der Dichte des Wassers $\left(1\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right)$ ist die in der vorherigen Teilaufgabe berechnete Dichte des Minigolfballes größer. Daraus folgt, dass der Ball mehr Masse pro Volumeneinheit als das Wasser hat. Also schwimmt der Ball im Wasser nicht.

A6 Der Messbecher wurde auf 150 Milliliter aufgefüllt und der Minigolfball anschließend hineingelegt. Danach wurde ein Gesamtvolumen von ca. 185 Milliliter abgelesen. Aus der Differenz ergibt sich ein Volumen für den Minigolfball von ca. 35 Milliliter. Da ein Milliliter dem gleichen Volumen entspricht wie ein Kubikzentimeter (1 ml = 1 cm^3), stimmt das mittels Verdrängungsmethode bestimmte Volumen mit dem aus dem Umfang errechneten Volumen ungefähr überein.

B1 Der Bereich, auf dem sich der Ball befinden kann, wird im Folgenden als Spielbereich bezeichnet. Exemplarisch wurden folgende drei Spielbahnen untersucht:

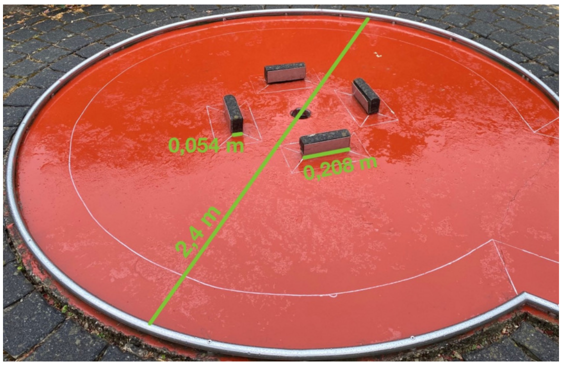
Abbildung 1: oben links: Bahn 2, oben rechts: Bahn 16, drei Bilder unten: Bahn 15

Die folgende Tabelle verzeichnet die auf den Bahnen gefundenen ebenen Formen. Dreidimensionale Formen werden dabei nur auf der Ebene des Spielfeldes betrachtet und entsprechend als zweidimensional notiert.

Bahn 2	Bahn 15	Bahn 16
Rechtecke	Rechtecke	Rechtecke
Kreise	Dreiviertelkreise	Trapeze
	rechtwinklige Dreiecke	Viertelring
	Kreise	Kreise

B2 Der Flächeninhalt des Spielbereichs der Bahnen kann berechnet werden, indem die einzelnen Abschnitte addiert und Hindernisse subtrahiert werden. Sofern nicht anders angegeben, beträgt im Folgenden die Breite der Bahn $1{,}15$ Meter, der Radius des Zielbereichs $1{,}2$ Meter und der Radius des Lochs $0{,}05$ Meter.

Bahn 2: Auf Bahn 2 ist der Abschlagbereich über ein Rechteck mit dem kreisförmigen Zielbereich verbunden. Im kreisförmigen Zielbereich befinden sich um das Loch vier quaderförmige Hindernisse, deren rechteckige Grundfläche subtrahiert wird. Die Messwerte sind in den folgenden Abbildungen eingetragen.

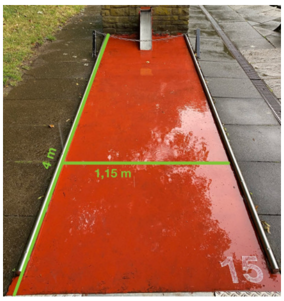


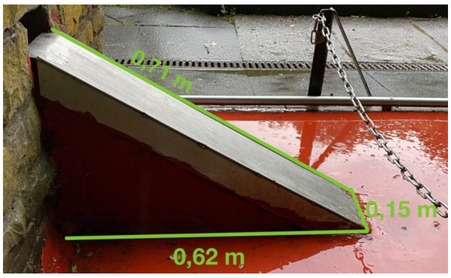
Daraus ergibt sich der Flächeninhalt des Spielbereichs von Bahn 2 wie folgt:

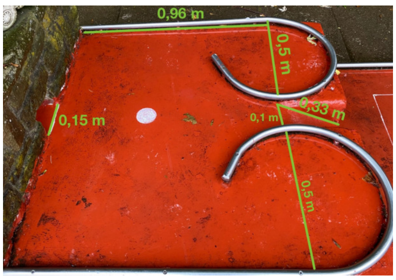
$$\begin{aligned} A_{\text{Bahn 2}} &= 8{,}76\,\text{m} \cdot 1{,}15\,\text{m} + \pi \cdot (1{,}2\,\text{m})^2 - \pi \cdot (0{,}05\,\text{m})^2 - 4 \cdot (0{,}054\,\text{m} \cdot 0{,}208\,\text{m}) \\ &\approx 14{,}55\,\text{m}^2. \end{aligned}$$

Der Flächeninhalt des Spielbereichs von Bahn 2 beträgt demnach circa 14,55 Quadratmeter.

Bahn 15: Für Bahn 15 zählt zum Flächeninhalt des Spielbereichs die rechteckige Fläche am Start, von der die rechteckige Fläche der Rampe subtrahiert wird. Die Rampenfläche und der anschließende Tunnel (Länge: $0{,}455$ Meter) gehören zum Spielbereich dazu und werden addiert. Hinter dem Tunnel befindet sich ein Podest mit zwei Dreiviertelkreisen und einer Rampe hinab zum Schlussstück der Bahn. Dem Flächeninhalt des Podestes wird ein Rechteck zugrunde gelegt, das sich über die gesamte Bahnbreite erstreckt und vom Ende des Tunnels bis zum Anfang der Rampe nach unten reicht (siehe Abbildung). Hinzuaddiert werden zwei Halbkreise – der ins Rechteck hineinragende Metallstab (der die Halbkreise zu den genannten Dreiviertelkreisen ergänzt) wird vernachlässigt. Zu dem rechteckigen Flächeninhalt der kleinen Rampe und der anschließenden rechteckigen „Zielgeraden“ kommt noch der kreisförmige Zielbereich hinzu, von dem das kreisförmige Loch subtrahiert wird. Die Messwerte für Bahn 15 sind in den folgenden Abbildungen eingetragen.





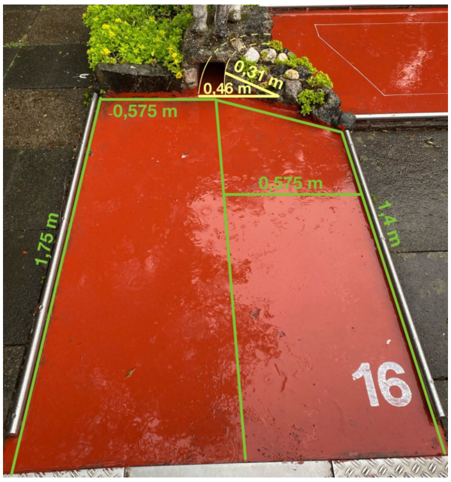


Daraus ergibt sich für den Spielbereich von Bahn 15 ein Flächeninhalt von

$$\begin{aligned} A_{\text{Bahn 15}} &= (4\,\text{m} \cdot 1{,}15\,\text{m}) - (0{,}62\,\text{m} \cdot 0{,}15\,\text{m}) + (0{,}71\,\text{m} \cdot 0{,}15\,\text{m}) + (0{,}455\,\text{m} \cdot 0{,}15\,\text{m}) \\ &\quad + (0{,}96\,\text{m} \cdot 1{,}15\,\text{m}) + \underbrace{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (0{,}25\,\text{m})^2}_{\text{2 Halbkreise, } r = 0{,}25\,\text{m}} + (0{,}33\,\text{m} \cdot 0{,}1\,\text{m}) \\ &\quad + (2{,}95\,\text{m} \cdot 1{,}15\,\text{m}) + \pi \cdot (1{,}2\,\text{m})^2 - \pi \cdot (0{,}05\,\text{m})^2 \approx 13{,}92\,\text{m}. \end{aligned}$$

Die Fläche des Spielbereichs beträgt somit ungefähr 13,92 Quadratmeter.

Bahn 16: Bei Bahn 16 lässt sich der Abschlagbereich in ein Rechteck und ein Trapez einteilen. Im Anschluss an den Startbereich befindet sich ein Tunnel, der näherungsweise in einer 90-Grad-Kurve verläuft und daher als Viertelkreisring interpretiert werden kann. Hinzu kommt weiterhin eine trapezähnliche Fläche, die den Tunnel mit dem kreisförmigen Zielbereich verbindet. Analog zu den anderen Bahnen wird die Fläche des Lochs subtrahiert. Die entsprechenden Abmessungen sind in den folgenden Abbildungen dargestellt.



Der Flächeninhalt des Viertelkreisrings im Tunnel ergibt sich aus der Fläche des inneren Kreises abzüglich der Fläche des äußeren Kreises. So erhält man einen Kreisring, dessen Flächeninhalt durch 4 dividiert werden muss, um den Flächeninhalt eines Viertels zu erhalten:

$$A_{\text{Viertelkreisring}} = \frac{\left(\pi \cdot r_{\text{aussen}}^2 - \pi \cdot r_{\text{innen}}^2\right)}{4} = \frac{\pi \cdot (0{,}46\,\text{m})^2 - \pi \cdot (0{,}31\,\text{m})^2}{4} \approx 0{,}09\,\text{m}^2$$

Der Flächeninhalt des gesamten Spielbereichs von Bahn 16 ergibt sich damit wie folgt:

$$\begin{aligned} A_{\text{Bahn 16}} &= (1{,}75\,\text{m} \cdot 0{,}575\,\text{m}) + \left(\frac{1{,}4\,\text{m} + 1{,}75\,\text{m}}{2}\right) \cdot 0{,}575\,\text{m} + \overbrace{0,09\,\text{m}^2}^{A_{\text{Viertelkreisring}}} \\ &\quad + \left(\frac{5\,\text{m} + 4{,}66\,\text{m}}{2}\right) \cdot 1{,}15\,\text{m} + \pi \cdot (1{,}2\,\text{m})^2 - \pi \cdot (0{,}05\,\text{m})^2 \approx 12{,}07\,\text{m}^2. \end{aligned}$$

Der Flächeninhalt des Spielbereichs von Bahn 16 beträgt demnach circa 12,07 Quadratmeter.

B3 Siehe Lösungen zu **B1** und **B2**.

B4 Mögliche Probleme können bei Bahnen auftreten, deren Gestalt nicht aus bekannten Flächen zusammengesetzt ist. Dann muss genau analysiert werden und gegebenenfalls eine sinnvolle Einteilung gefunden werden. Weiterhin ist denkbar, dass die Schülerinnen und Schüler ihnen bekannte Flächen zunächst nicht als solche identifizieren. Beispielsweise könnte dies die Rollfläche in einem Looping sein, die einem Parallelogramm entspricht.

C2 Folgende Schlagzahlen wurden erzielt:

Bahn 1: 1 Schlag	Bahn 8: 3 Schläge	Bahn 15: 3 Schläge
Bahn 2: 4 Schläge	Bahn 9: 2 Schläge	Bahn 16: 2 Schläge
Bahn 3: 2 Schläge	Bahn 10: 7 Schläge	Bahn 17: 5 Schläge
Bahn 4: 5 Schläge	Bahn 11: 5 Schläge	Bahn 18: 2 Schläge
Bahn 5. 3 Schläge	Bahn 12: 6 Schläge	Bahn 19: 2 Schläge
Bahn 6: 3 Schläge	Bahn 13: 4 Schläge	Bahn 20: 5 Schläge
Bahn 7: 6 Schläge	Bahn 14: 4 Schläge	

Im Mittel wurden für alle 20 Bahnen 3,7 Schläge benötigt (denn: $74/20 = 3,7$). Der Median beträgt 3,5.
Nimmt man sowohl die schlechteste als auch die beste Bahn aus der Wertung, beträgt der Mittelwert 3,66 und der Median 3.

Didaktischer Kommentar

Diese Aufgabe ist für Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe I konzipiert und eignet sich als Übungseinheit zur Identifikation von zusammengesetzten Flächen und zur Bestimmung ihrer Flächeninhalte. Weiterhin eignet sie sich als Einstiegsaufgabe zur Volumenbestimmung von Körpern. Entsprechend benötigen die Schülerinnen und Schüler im Vorfeld Kenntnisse zur Bestimmung von Flächeninhalten an den gängigen ebenen Figuren (Quadrat, Rechteck, Kreis, Trapez, etc.). Die Zahl π sollte bekannt sein sowie die Formel zur Berechnung des Kreisumfangs. Kenntnisse zur Volumenrechnung sind nicht notwendig.

Die Schülerinnen und Schüler kommen bei diesem Spaziergang zum ersten Mal mit der Formel zur Berechnung des Kugelvolumens in Berührung und überprüfen diese mithilfe der Verdrängungsmethode. Das Volumen wird dann zur Berechnung der Dichte eines Minigolfballs verwendet und führt die Schülerinnen und Schüler somit an die Naturwissenschaften heran. Dies trägt dazu bei, die errechneten Zahlen einordnen, vergleichen und interpretieren zu können.
Im zweiten Teil des Spaziergangs lernen die Schülerinnen und Schüler ihnen bekannte geometrische Figuren in komplexen zusammengesetzten Flächen wiederzufinden und üben deren Flächenberechnung. Dabei ist eine Binnendifferenzierung möglich, indem die Lehrkraft jeder Gruppe eine passende Minigolfbahn im Vorhinein zuweist.

Um den Spaziergang durchführen zu können, wird neben einer Waage, Schreibmaterial und einem Taschenrechner auch ein Messbecher mit einem maximalem Ableseintervall von 10 Millilitern, ein langes Maßband (oder alternativ ein kurzes Maßband und ein Zollstock) und Wasser (etwa 2 Liter) benötigt.