Das Ganze nimmt langsam Formen an!

Geometrie an Verkehrsschildern

Lösungsvorschlag

Hinweis: Diese Lösung wurde an Verkehrsschildern in Oidtweiler (NRW) erstellt und stellt lediglich einen Lösungsvorschlag dar. Je nach Lernort weichen die Ergebnisse ab. Bis auf lokale Ausnahmen haben Verkehrsschilder drei unterschiedliche Größen. In einer Geschwindigkeitszone bis zu 20 Kilometern pro Stunde sind die Schilder kleiner als in der Geschwindigkeitszone von 20 bis 80 Kilometern pro Stunde (Verhältnis 0,7:1). In der Geschwindigkeitszone ab 80 Kilometer pro Stunde sind die Schilder 1,3 mal so groß wie in der 20-80er Zone.

Es folgen die Lösungen zu den Teilaufgaben **A1** bis **B3** für jedes der vier vorgeschlagenen Verkehrsschilder.

Die folgenden Lösungen beziehen sich auf das Absolute-Halteverbotsschild.

A1 In dem Schild können folgende geometrische Figuren erkannt werden:

- Das Schild ist kreisförmig.
- Der äußere rote Teil ist ein Kreisring.
- In dem Schild befinden sich vier blaue Kreisteile.
- Das „X“ besteht aus zwei Rechtecken, welche an den Enden jeweils durch den roten Kreisring abgerundet werden.

A2 Folgende Messdaten sind für das Schild erhoben worden:

- Durchmesser des Schildes: 60 Zentimeter
- Radius eines blauen Viertelkreises: 17,5 Zentimeter
- Innendurchmesser: 41,8 Zentimeter
- Breite der roten Linien, welche ein „X“ bilden: 6 Zentimeter

A3 Die Schülerinnen und Schüler fertigen eine maßstabsgetreue Skizze an.

B1 Der Umfang eines Kreises lässt sich mit folgender Formel berechnen:

$$U_{\text{Kreis}} = 2 \cdot \pi \cdot r = \pi \cdot d$$

Der Durchmesser beträgt 60 Zentimeter. Damit ergibt sich für den Umfang:

$$U_{\text{Schild}} = \pi \cdot 60\,\text{cm} \approx 188,5\,\text{cm}$$

Der Umfang des Schildes beträgt somit 188,5 Zentimeter.

Auf den ersten Blick schwer zu erkennen ist, dass nach Zusammenschiebung aller blauen Flächen kein Kreis entsteht. Erst bei genauem Messen wird ersichtlich, dass die Punkte auf dem ”gebogenen Rand” der Teilfläche nicht alle den gleichen Abstand zum Mittelpunkt haben.

Daher kann der Umfang der Fläche, die entsteht, wenn man alle blauen Stücke zusammenschiebt, nur durch einen Kreis approximiert werden. Dieser hätte einen Radius von 17,5 Zentimetern. Damit folgt für den Umfang:

$$U_{\text{blaue Fläche}} \approx 2 \cdot \pi \cdot 17,5\,\text{cm} \approx 109,96\,\text{cm}$$

Die zusammengeschobene blaue Fläche hat einen Umfang von etwa 109,96 Zentimetern.

B2 Der Flächeninhalt eines Kreises lässt sich mit folgender Formel berechnen:

$$A_{\text{Kreis}} = \pi \cdot r^2$$

Mit $r = \frac{d}{2}$ ergibt sich für den Flächeninhalt:

$$A_{\text{Schild}} = \pi \cdot (r_{\text{ges.}})^2 = \pi \cdot (30\,\text{cm})^2 \approx 2.827,43\,\text{cm}^2$$

Der Flächeninhalt des Schildes beträgt 2.827,43 Quadratzentimeter.

Der Flächeninhalt der blauen Fläche kann mit folgender Formel approximiert werden:

$$A_{\text{blaue Fläche}} = \pi \cdot (r_{\text{blau}})^2 = \pi \cdot (17,5\,\text{cm})^2 \approx 962,11\,\text{cm}^2$$

Der Flächeninhalt der blauen Fläche beträgt 962,11 Quadratzentimeter.

Um den Flächeninhalt der roten Fläche berechnen zu können, können wir einfach die Differenz bilden.

$$A_{\text{rote Fläche}} = A_{\text{Schild}} - A_{\text{blaue Fläche}} = 2.827,43\,\text{cm}^2 - 962,11\,\text{cm}^2 = 1.865,32\,\text{cm}^2$$

Der Flächeninhalt der roten Fläche beträgt 1865,32 Quadratzentimeter.

B3 Um das Verhältnis $V_{\text{r:S}}$ von der roten Fläche zur gesamten Fläche zu bestimmen, muss der Flächeninhalt der roten Fläche durch den Flächeninhalt der gesamten Fläche geteilt werden.

$$V_{\text{r:S}} = \frac{A_{\text{rot}}}{A_{\text{Schild}}} = \frac{1.865,32\,\text{cm}^2}{2.827,43\,\text{cm}^2} \approx 0,66$$
$$\Rightarrow V_{\text{r:S}} \approx 2:3$$

Das Verhältnis von roter Fläche zur gesamten Fläche beträgt ungefähr zwei zu drei.

Um das Verhältnis $V_{\text{b:S}}$ von der blauen Fläche zur gesamten Fläche zu bestimmen, muss der Flächeninhalt der blauen Fläche durch den Flächeninhalt der gesamten Fläche geteilt werden.

$$V_{\text{b:S}} = \frac{A_{\text{blau}}}{A_{\text{Schild}}} = \frac{962,11\,\text{cm}^2}{2.827,43\,\text{cm}^2} \approx 0,34$$
$$\Rightarrow V_{\text{b:S}} \approx 1:3$$

Das Verhältnis von der blauen Fläche zur gesamten Fläche beträgt ungefähr eins zu drei.

Die folgenden Lösungen beziehen sich auf das Vorfahrt-Achten-Schild.

A1 Das Schild ist ein gleichseitiges Dreieck. Auch das weiße Dreieck in dem Schild ist gleichseitig. Die Gleichseitigkeit erkennt man daran, dass alle drei Seiten gleich lang sind oder daran, dass alle drei Winkel gleich groß sind (60 Grad).

A2 Folgende Messdaten sind für das Schild erhoben worden:

- Grundseite des Schildes: 83,5 Zentimeter
- Höhe des Schildes: 72,3 Zentimeter
- Grundseite des Innendreiecks: 58,5 Zentimeter

A3 Die Schülerinnen und Schüler fertigen eine maßstabsgetreue Skizze an.

B1 Um den Umfang des Schildes (gleichseitiges Dreieck) mit Grundseite s zu berechnen, kann folgende Formel angewendet werden:

$$U_{\text{Schild}} = 3 \cdot s = 3 \cdot 83,5\,\text{cm} = 250,5\,\text{cm}$$

Der Umfang des Schildes beträgt somit 250,5 Zentimeter.

Um den Umfang des weißen Innendreiecks mit Grundseite s_{innen} zu berechnen, kann folgende Formel angewendet werden:

$$U_{\text{Innendreieck}} = 3 \cdot s_{\text{innen}} = 3 \cdot 58,5\,\text{cm} = 175,5\,\text{cm}$$

Der Umfang des Innendreiecks beträgt somit 175,5 Zentimeter.

B2 Um den Flächeninhalt des Schildes mit Grundseite s und Höhe h zu berechnen, kann folgende Formel angewendet werden:

$$A_{\text{Schild}} = \frac{s \cdot h}{2} = \frac{83,5\,\text{cm} \cdot 72,3\,\text{cm}}{2} \approx 3018,53\,\text{cm}^2$$

Der Flächeninhalt des Schildes beträgt also etwa 3018,53 Quadratzentimeter.

Um den Flächeninhalt des weißen Innendreiecks ausrechnen zu können, muss zunächst die Höhe des weißen Dreiecks berechnet werden. Dann wird das Verhältnis von Seitenlänge s zu Höhe h in einem gleichseitigen Dreieck berechnet. Der Satz des Pythagoras und die Konstruktion eines gleichseitigen Dreiecks liefern:

$$\left(\frac{s}{2}\right)^2 + h^2 = s^2 \Leftrightarrow h^2 = s^2 - \frac{s^2}{4} \Leftrightarrow h = \sqrt{s^2 - \frac{s^2}{4}} = \sqrt{\frac{3s^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot s$$

Hinweis: Wenn der Satz des Pythagoras noch nicht eingeführt wurde, können die Schülerinnen und Schüler auch einfach die Höhe des Schildes durch die Seitenlänge des Schildes teilen, was ungefähr dem Faktor von oben entspricht.

Dies liefert für die Höhe des weißen Innendreiecks:

$$h_{\text{weiß}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot s_{\text{weiß}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 58,5\,\text{cm} = 50,7\,\text{cm}$$

Damit kann wie folgt der Flächeninhalt des weißen Dreiecks berechnet werden:

$$A_{\text{weiß}} = \frac{s_{\text{weiß}} \cdot h_{\text{weiß}}}{2} = \frac{58,5\,\text{cm} \cdot 50,7\,\text{cm}}{2} \approx 1.482,96\,\text{cm}^2$$

Der Flächeninhalt des weißen Innendreiecks beträgt also 1482,96 Quadratzentimeter.

Die rote Fläche kann nun wie folgt berechnet werden:

$$A_{\text{rot}} = A_{\text{Schild}} - A_{\text{weiß}} = 3.018,53\,\text{cm}^2 - 1.482,96\,\text{cm}^2 = 1.535,57\,\text{cm}^2$$

Der Flächeninhalt der roten Fläche beträgt 1535,57 Quadratzentimeter.

B3 Um das Verhältnis $V_{\text{w:S}}$ von der weißen Fläche zur gesamten Fläche zu bestimmen, muss der Flächeninhalt der weißen Fläche durch den Flächeninhalt der gesamten Fläche geteilt werden:

$$V_{\text{w:S}} = \frac{A_{\text{weiß}}}{A_{\text{Schild}}} = \frac{1.482,96\,\text{cm}^2}{3.018,53\,\text{cm}^2} \approx 0,49$$
$$\Rightarrow V_{\text{w:S}} \approx 1:2$$

Das Verhältnis von weißer Fläche zur gesamten Fläche beträgt ungefähr eins zu zwei.

Analog berechnet man das Verhältnis der roten Fläche zur gesamten Fläche des Schildes. Es folgt für $V_{\text{r:S}}$:

$$V_{\text{r:S}} = \frac{A_{\text{rot}}}{A_{\text{Schild}}} = \frac{1.535,57\,\text{cm}^2}{3.018,53\,\text{cm}^2} \approx 0,51$$
$$\Rightarrow V_{\text{r:S}} \approx 1:2$$

Das Verhältnis von roter Fläche zur gesamten Fläche beträgt ungefähr eins zu zwei.

Bemerkung: Die rote Fläche ist minimal größer als die weiße Fläche, auch wenn durch Runden das gleiche Verhältnis bei beiden Farben bestimmt worden ist.

Die folgenden Lösungen beziehen sich auf das Stopp-Schild.

A1 Das Stoppschild ist ein regelmäßiges Achteck. Dies kann man daran erkennen, dass alle acht Seiten gleich lang und alle Winkel gleich groß (135 Grad) sind.

A2 Folgende Messdaten sind für das Schild erhoben worden:

- Die Gesamtbreite des Schildes beträgt 90 Zentimeter.
- Die Lange einer Grundseite beträgt 38 Zentimeter.

A3 Die Schülerinnen und Schüler fertigen eine maßstabsgetreue Skizze an.

B1 Um den Umfang eines regelmäßigen Achtecks mit Grundseite s zu bestimmen kann folgende Formel genutzt werden:

$$U_{\text{regelmäßiges Achteck}} = s+s+s+s+s+s+s+s = 8 \cdot s$$

Da die Grundseite 38 Zentimeter beträgt, folgt für den Umfang:

$$U_{\text{regelmäßiges Achteck}} = 8 \cdot 38\,\text{cm} = 304\,\text{cm}$$

Der Umfang des Stoppschildes beträgt 304 Zentimeter.

Der Umfang der weißen Schrift kann durch eine Schätzung ermittelt werden. Eine Alternative Annäherung ist durch eine Approximation mithilfe von Rechtecken möglich. (siehe Abbildung in Lösung zu Teilaufgabe **B2**). Für die einzelnen Buchstaben ergeben sich folgende Umfänge:

$$U_S \approx 142\,\text{cm} \quad U_T \approx 88{,}35\,\text{cm} \quad U_O \approx 144{,}9\,\text{cm} \quad U_P \approx 107{,}55\,\text{cm}$$

B2 Um den Flächeninhalt des Stoppschildes mit Grundseite s auszurechnen, kann folgende Formel genutzt werden:

$$A_{\text{regelmäßiges Achteck}} = (2 + 2 \cdot \sqrt{2}) \cdot s^2$$

Daraus folgt für den Flächeninhalt:

$$A_{\text{regelmäßiges Achteck}} = (2 + 2 \cdot \sqrt{2}) \cdot (38\,\text{cm})^2 \approx 6.972{,}25\,\text{cm}^2$$

Falls diese Formel nicht bekannt ist, kann das Schild in verschiedene bekannte geometrische Figuren aufgeteilt und der Flächeninhalt über folgende Formel berechnet werden:

$$A_{\text{Stoppschild}} = A_{\text{Rechteck}} + 2 \cdot A_{\text{Trapez}}$$

Um den Flächeninhalt des Rechtecks berechnen zu können, muss die Gesamtbreite b mit der Seitenlänge s multipliziert werden:

$$A_{\text{Rechteck}} = b \cdot s = 90\,\text{cm} \cdot 38\,\text{cm} = 3.420\,\text{cm}^2$$

Die Fläche eines Trapezes mit Unterseite a, dazu parallel liegender Oberseite c und der senkrecht auf a und c stehenden Höhe h kann mit folgender Formel berechnet werden:

$$A_{\text{Trapez}} = \frac{(a+c) \cdot h}{2}$$

a und c sind bekannt. h muss noch berechnet werden. Da das Stoppschild regelmäßig ist, kann folgende Gleichung mit dem Satz des Pythagoras aufgestellt werden:

$$h^2 + h^2 = s^2 \Leftrightarrow 2h^2 = s^2 \Leftrightarrow h^2 = \frac{s^2}{2} \Leftrightarrow h = \frac{s}{\sqrt{2}} \Rightarrow h = \frac{38\,\text{cm}}{\sqrt{2}} \approx 26,9\,\text{cm}$$

Damit folgt für den Flächeninhalt eines Trapezes:

$$A_{\text{Trapez}} = \frac{(90\,\text{cm} + 38\,\text{cm}) \cdot 26,9\,\text{cm}}{2} = 1.721,6\,\text{cm}^2$$

Daraus folgt für den Flächeninhalt des Stoppschildes:

$$A_{\text{Stoppschild}} = 3.420\,\text{cm}^2 + 2 \cdot 1.721,6\,\text{cm}^2 = 6.863,2\,\text{cm}^2$$

Der Flächeninhalt des Stoppschildes beträgt somit unter Anwendung dieses Rechenweges 6.863,2 Quadratzentimeter.

Eine alternativer Lösungsansatz fasst das Schild zunächst als Quadrat mit einer Seitenlänge von 90cm auf. Da dieses Quadrat jedoch zu groß ist, müssen die vier gleichschenkligen Dreiecke, welche sich an den Ecken des Quadrates befinden, subtrahiert werden.
Der Flächeninhalt des Quadrates kann dann wie folgt berechnet werden:

$$A_{\text{Quadrat}} = a \cdot a = a^2 = (90\,\text{cm})^2 = 8.100\,\text{cm}^2$$

Die vier gleichschenkligen Dreiecke, die subtrahiert werden müssen, haben jeweils einen rechten Winkel. Daraus folgt, dass man die Gesamtfläche der vier Dreiecke als Quadrat mit der Seitenlänge, welche der Hypotenuse der ursprünglichen Dreiecke entspricht, betrachten kann. Die Hypotenuse ist eine Seitenlänge des Achtecks und somit gilt s = 38 Zentimeter. Daraus folgt für den Flächeninhalt der vier Dreiecke:

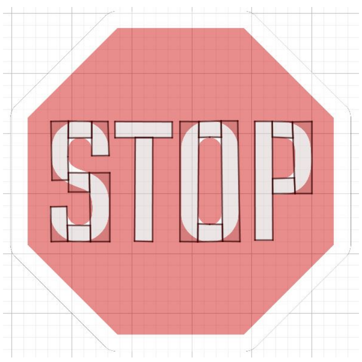
$$A_{\text{Dreiecke}} = s^2 = (38\,\text{cm})^2 = 1.444\,\text{cm}^2$$

Daraus folgt für den Flächeninhalt des Stoppschildes:

$$A_{\text{Quadrat}} - A_{\text{Dreiecke}} = 8.100\,\text{cm}^2 - 1.444\,\text{cm}^2 = 6.656\,\text{cm}^2$$

Der Flächeninhalt des Stoppschildes beträgt unter Anwendung dieses Rechenweges 6.656 Quadratzentimeter.

Der Flächeninhalt der weißen Schrift kann über rechteckige Flächen angenähert werden:



So ergeben sich für die einzelnen Buchstaben folgende ungefähre Flächeninhalte:

$A_S \approx 278,02\text{cm}^2$ $\quad A_T \approx 169,09\text{cm}^2$
$A_O \approx 306,68\text{cm}^2$ $\quad A_P \approx 247,95\text{cm}^2$

B3 Um jeweils das Verhältnis der Fläche der einzelnen Buchstaben zur Gesamtfläche zu bestimmen, muss der Flächeninhalt des jeweiligen Buchstabens durch den Flächeninhalt der gesamten Fläche geteilt werden. Man erhält:

- Für den Buchstaben S: $V_{\mathrm{S:S}} = \frac{A_{\mathrm{S}}}{A_{\mathrm{ges}}} = \frac{278{,}02\,\mathrm{cm}^2}{6656\,\mathrm{cm}^2} \approx 0,042$
  $\Rightarrow V_{\mathrm{S:S}} \approx 4,2 : 100$
- Für den Buchstaben T: $V_{\mathrm{T:S}} = \frac{A_{\mathrm{T}}}{A_{\mathrm{ges}}} = \frac{169{,}09\,\mathrm{cm}^2}{6656\,\mathrm{cm}^2} \approx 0,023$
  $\Rightarrow V_{\mathrm{T:S}} \approx 2,3 : 100$
- Für den Buchstaben O: $V_{\mathrm{O:S}} = \frac{A_{\mathrm{O}}}{A_{\mathrm{ges}}} = \frac{306{,}68\,\mathrm{cm}^2}{6656\,\mathrm{cm}^2} \approx 0,046$
  $\Rightarrow V_{\mathrm{O:S}} \approx 4,6 : 100$
- Für den Buchstaben P: $V_{\mathrm{P:S}} = \frac{A_{\mathrm{P}}}{A_{\mathrm{ges}}} = \frac{247{,}09\,\mathrm{cm}^2}{6656\,\mathrm{cm}^2} \approx 0,037$
  $\Rightarrow V_{\mathrm{P:S}} \approx 3,7 : 100$

Das Verhältnis des Buchstaben S zur gesamten Fläche beträgt circa 4,2 zu 100. Somit sind ungefähr 4,2 Prozent des Schildes Buchstabe S.
Das Verhältnis des Buchstaben T zur gesamten Fläche beträgt circa 2,3 zu 100. Somit sind ungefähr 2,3 Prozent des Schildes Buchstabe T.
Das Verhältnis des Buchstaben O zur gesamten Fläche beträgt circa 4,6 zu 100. Somit sind ungefähr 4,6 Prozent des Schildes Buchstabe O.
Das Verhältnis des Buchstaben P zur gesamten Fläche beträgt circa 3,7 zu 100. Somit sind ungefähr 3,7 Prozent des Schildes Buchstabe P.

Die folgenden Lösungen beziehen sich auf das Sackgassenschild.

A1 Die Form des Schildes ist quadratisch. Das „T“ besteht aus zwei aneinander gesetzten Rechtecken.

A2 Folgende Messdaten sind für das Schild erhoben worden:

- Breite des Schildes: 60 Zentimeter
- Höhe des Schildes: 60 Zentimeter
- Breite des weißen Teils des „T“: 8 Zentimeter
- Höhe des weißen Teils des „T“: 33,5 Zentimeter
- Breite des roten Teils des „T“: 28 Zentimeter
- Höhe des roten Teils des „T“: 9,3 Zentimeter

A3 Die Schülerinnen und Schüler fertigen eine maßstabsgetreue Skizze an.

B1 Der Umfang eines Quadrates mit Grundseite a kann wie folgt berechnet werden:

$$U_{\text{Quadrat}} = a + a + a + a = 4 \cdot a$$

Da die Seitenlänge 60 Zentimeter beträgt, gilt für den Umfang:

$$U_{\text{Sackgasse}} = 4 \cdot 60\,\text{cm} = 240\,\text{cm}$$

Der Umfang des Schildes beträgt also 240 Zentimeter.
Der Umfang des weißen Rechtecks beträgt 83 Zentimeter und der Umfang des roten Rechtecks beträgt 74,6 Zentimeter.

B2 Der Flächeninhalt eines Quadrates mit Grundseite a kann wie folgt berechnet werden:

$$A_{\text{Quadrat}} = a \cdot a = a^2$$

Da die Seitenlänge 60 Zentimeter beträgt, gilt für den Flächeninhalt:

$$A_{\text{Sackgasse}} = (60\,\text{cm})^2 = 3.600\,\text{cm}^2$$

Der Flächeninhalt des Schildes beträgt 3.600 Quadratzentimeter.
Wenn man das „T“ in ein rotes und weißes Rechteck aufteilt, erhält man folgende Größen:

$$A_{\text{weiß}} = b_{\text{weiß}} \cdot h_{\text{weiß}} = 8\,\text{cm} \cdot 33,5\,\text{cm} = 268\,\text{cm}^2$$
$$A_{\text{rot}} = b_{\text{rot}} \cdot h_{\text{rot}} = 28\,\text{cm} \cdot 9,3\,\text{cm} = 260,4\,\text{cm}^2$$

Um die gesamte Fläche vom „T“ zu erhalten, müssen die Flächen der beiden aufgeteilten Rechtecke addiert werden:

$$A_{\text{T}} = A_{\text{weiß}} + A_{\text{rot}} = 268\,\text{cm}^2 + 260,4\,\text{cm}^2 = 528,4\,\text{cm}^2$$

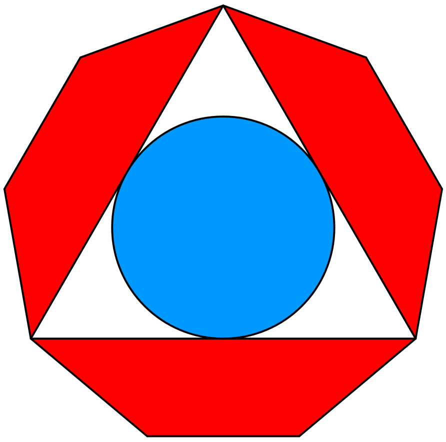
Der Flächeninhalt des „T“ beträgt somit 528,4 Quadratzentimeter.

B3 Um den Anteil $A_{\text{T:S}}$ des „T“ am gesamten Schild zu berechnen, muss die Fläche des „T“ durch die Fläche des Schildes geteilt werden:

$$A_{\text{T:S}} = \frac{A_{\text{T}}}{A_{\text{Schild}}} = \frac{528,4\,\text{cm}^2}{3600\,\text{cm}^2} \approx 0,1467 = 14,67\,\%$$

Der Anteil des „T“ am Schild beträgt etwa 14,67 Prozent.

Lösungsvorschlag für die Teilaufgaben C1 und C2



Das Schild besteht aus einem regelmäßigen Neuneck, einem gleichseitigem Dreieck und einem Kreis. Durch diese Anordnung entstehen unter anderem drei gleichschenklige Trapeze.

Didaktischer Kommentar

Dieser Mathematische Spaziergang behandelt das Thema Umfang- und Flächenberechnung von ebenen Figuren und eignet sich damit für Schülerinnen und Schüler, die zu Beginn der Sekundarstufe 1 stehen. Die Schülerinnen und Schüler sollen während des Spaziergangs ein Verkehrsschild mathematisch untersuchen. Je nach Leistungsstand der Klasse kann sich die Lehrkraft für ein Verkehrsschild entscheiden. Die Berechnungen am Sackgassenschild und am Vorfahrt-Achten-Schild sind leichter durchzuführen als die am Halteverbotsschild und am Stoppschild. Für den Fall, dass mehrere Verkehrsschilder nur unweit voneinander entfernt sind, besteht die Möglichkeit, die Klasse nach Leistungsstand aufzuteilen und die Schülerinnen und Schüler arbeitsteilig arbeiten zu lassen.
Da bei den Aufgaben viele Formeln anzuwenden sind, sollten diese zuvor wiederholt und gefestigt werden. Den Schülerinnen und Schülern sollte der Begriff des Maßstabes bekannt sein und auch die Verhältnisrechnung sollte bereits im Unterricht thematisiert worden sein.
Aufgabenteil **C** erfordert keine Messungen am Lernort und kann daher auch nach der Rückkehr im Klassenraum bearbeitet werden.