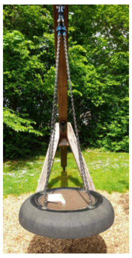
Um drei Ecken gedacht

Winkelbestimmung auf dem Spielplatz

Lösungsvorschlag

Hinweis: Diese Lösung wurde auf dem Spielplatz in der Henri-Spaak-Straße in Bonn Alfter erstellt und stellt lediglich einen Lösungsvorschlag dar. Je nach Lernort weichen die Ergebnisse ab. Für diese Lösung wurden ausschließlich die Dreiecke an dem Spielgerät Reifenschaukel betrachtet.

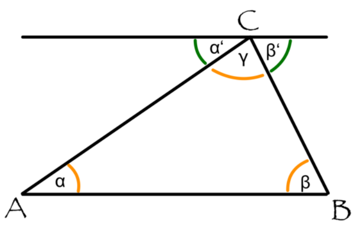


Die folgende Tabelle visualisiert die Ergebnisse der Teilaufgaben **A2, B1, B2** und **C1**:

		1.	2.	3.	4.	5.	6.
Lage des Dreiecks		Aufhängung Seite 1	Aufhängung Seite 2	Aufhängung Seite 3	Gestell linke Seite	Gestell rechte Seite	Gestell vorne
Seitenlänge	a	170	170	170	120	215	160
	b	170	170	170	215	120	160
	c	45	45	45	222	223	90
Winkelgröße in Grad	α	82	82	82	32	70	74
	β	82	82	82	71	32	74
	γ	16	16	16	77	78	32
Winkelsumme in Grad $(\alpha+\beta+\gamma)$		180	180	180	180	180	180
Art des Dreiecks		gleich-schenkliges, spitzwinkliges Dreieck	gleich-schenkliges, spitzwinkliges Dreieck	gleich-schenkliges, spitzwinkliges Dreieck	spitzwinkliges Dreieck	spitzwinkliges Dreieck	gleich-schenkliges, spitzwinkliges Dreieck

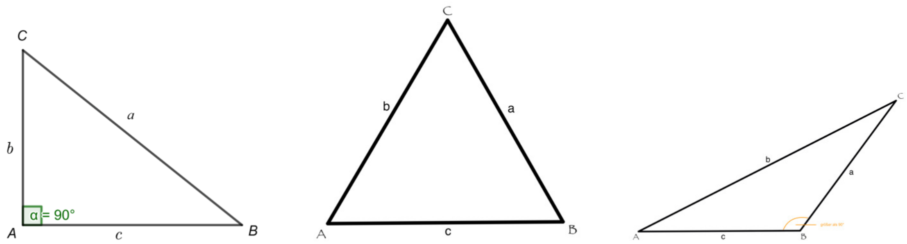
B3 Die Summe der Innenwinkel in einem Dreieck beträgt 180°.

B4 Im Folgenden verwenden wir den Wechselwinkelsatz. Sei das Dreieck *ABC* gegeben.

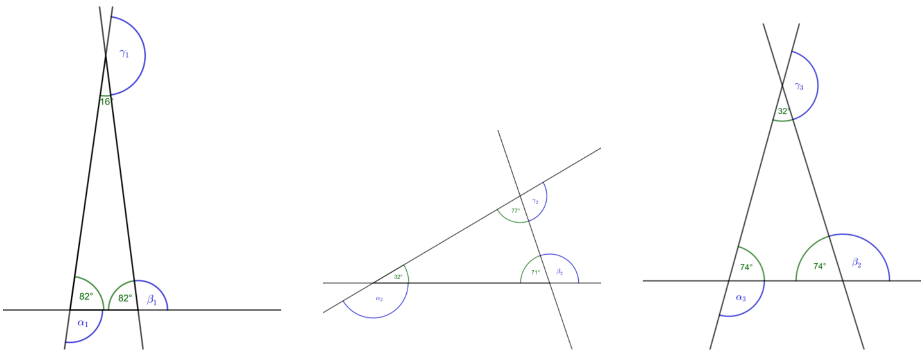


Wir ziehen eine parallele Gerade zur Strecke $|\overline{AB}|$ durch den Punkt *C*. Durch den Wechselwinkelsatz wissen wir, dass $\alpha' = \alpha$ und $\beta' = \beta$.
Wegen $\alpha' + \beta' + \gamma$=180°(gestreckter Winkel) folgt $\alpha + \beta + \gamma$=180°, was den Beweis der Innenwinkelsumme im Dreieck *ABC* darstellt.

C2 In der Reifenschaukel wurden folgende Dreiecksarten nicht gefunden: rechtwinkliges Dreieck (links), gleichseitiges Dreieck (Mitte) und stumpfwinkliges Dreieck (rechts).



D1 Es wurden die Dreiecke 1, 4 und 6 ausgewählt (siehe Tabelle). Die folgenden Abbildungen visualisieren, welche Außenwinkel jeweils bestimmt wurden:

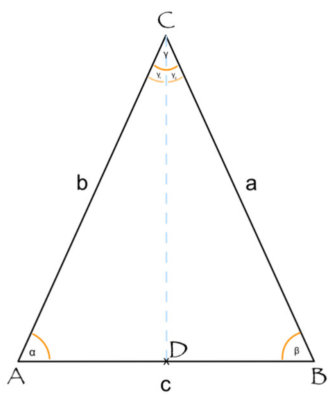


In Dreieck 1 (links) wurden die Winkel $\alpha_1 = 98°,\ \beta_1 = 98°,\ \gamma_1 = 164°$ bestimmt.
In Dreieck 4 (mitte) wurden die Winkel $\alpha_2 = 148°,\ \beta_2 = 109°,\ \gamma_2 = 103°$ bestimmt.
In Dreieck 6 (rechts) wurden die Winkel $\alpha_3 = 106°,\ \beta_3 = 106°,\ \gamma_3 = 148°$ bestimmt.

Es fällt auf, dass der Außenwinkel an einer Ecke des Dreiecks genauso groß ist, wie die Summe der Innenwinkel an den beiden anderen Ecken.
Beispiel für Dreieck 1: Es ist $\alpha_1 = 98°$ und es ist $\beta + \gamma = 82° + 16° = 98°$

D2 In einem gleichschenkligen Dreieck sind die Basiswinkel gleich groß.

Beweisidee für den Basiswinkelsatz: Zerlege das Dreieck *ABC* durch die Winkelhalbierende des Winkels, der kein Basiswinkel ist, in zwei Dreiecke und zeige mit Hilfe der Kongruenzsätze, dass $\alpha = \beta$.



<u>Beweis:</u>
Sei das gleichschenklige Dreieck *ABC* mit *a* = *b* gegeben.

(1) Wir wissen also, dass die Seiten *a* und *b* gleich lang sind.

(2) Man zeichne nun die Winkelhalbierende in C ($\overline{CD}$) ein.

(3) Aus (2) folgt: $\gamma_1 = \gamma_2 = \frac{1}{2} \cdot \gamma$.

(4) Zudem teilen sich die Dreiecke *ABC* und *DBC* die Seite $\overline{CD}$.

(5) Aus (1), (3) und (4) folgt nach dem SWS-Kongruenzsatz: Die Dreiecke *ADC* und *BDC* sind kongruent.

(6) Daraus folgt $\alpha = \beta$.

Didaktischer Kommentar

In diesem Spaziergang können Schülerinnen und Schüler Dreiecke und ihre Eigenschaften auf dem Spielplatz entdecken und dabei den Innen- und Außenwinkelsatz sowie den Basiswinkelsatz für Dreiecke kennenlernen. Damit richtet sich diese Aufgabe an Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe I, die diese Sätze noch nicht im Unterricht behandelt haben. Für eine erfolgreiche Bearbeitung der Aufgabe wird vorausgesetzt, dass die Schülerinnen und Schüler wissen, wie man mithilfe eines Geodreiecks Winkel messen kann. Für die Beweise des Innenwinkelsatzes und des Basiswinkelsatzes sollte ebenfalls bekannt sein, was der Wechselwinkelsatz besagt und wie die Kongruenzsätze lauten.

Die Gliederung der Teilaufgaben erfolgt in diesem Spaziergang thematisch: Aufgabenteil **A** dient zur Vorbereitung der späteren Aufgaben. Die Schülerinnen und Schüler sollen sich über den Spielplatz bewegen und gezielt nach Dreiecken suchen. Anhand dieser sollen in den folgenden Aufgabenteilen die mathematischen Sätze kennengelernt und bewiesen werden.
Der Aufgabenteil **B** beschäftigt sich mit den Innenwinkeln im Dreieck. Für den Beweis des Innenwinkelsatzes ist es hilfreich, wenn die Schülerinnen und Schüler den Wechselwinkelsatz bereits im Unterricht kennengelernt haben.
Die verschiedenen Arten von Dreiecken werden im Aufgabenteil **C** untersucht und veranschaulicht. Abschließend sollen der Außenwinkelsatz (Teilaufgabe **D1**) und der Basiswinkelsatz (Teilaufgabe **D2**) erarbeitet werden. Für den Beweis des Basiswinkelsatzes sollten die Schülerinnen und Schüler die Kongruenzsätze im Dreieck kennen.

Hinweis: Die Tabelle aus Teilaufgabe **A2** kann alternativ von der Lehrkraft am Computer für alle Schülerinnen und Schüler erstellt und vor Ort als Arbeitsblatt ausgeteilt werden.