Erfrischung gefällig?

Wie kriegt das Wasser die Kurve?

Lösungsvorschlag

Diese Lösung wurde in Bonn am Brunnen vor dem Sterntor erstellt und stellt lediglich einen Lösungsvorschlag dar. Je nach Lernort weichen die Ergebnisse ab.

A1

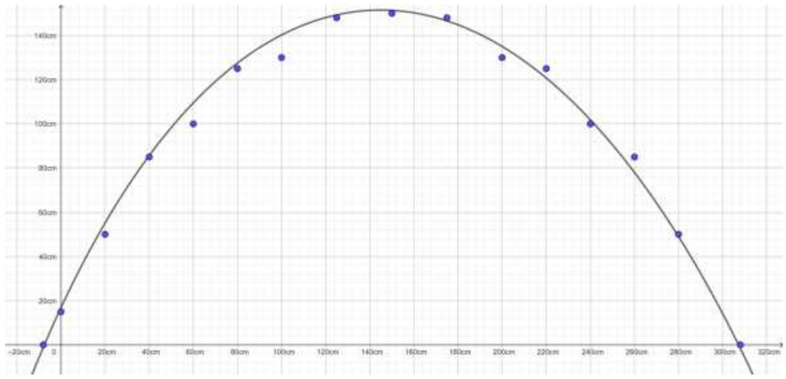
Die Wahl des Koordinatenursprunges ist beliebig. Hier wurde die Treppenkante als Koordiatenursprung gewählt, damit dort ein Fixpunkt zum Anlegen des Maßbandes ist (siehe Abbildung). Alternativ bietet es sich an, den Austrittspunkt des Wasserstrahls als Koordinatenursprung zu wählen. Das Koordinatensytem sollte aus gewählt werden, dass auf der x-Achse die Horizontalentfernung im etwa im Intervall $[-200, 3200]$ und auf der y-Achse die Höhe im Intervall $[-200, 1600]$ (Angaben in Zentimetern) abgetragen werden kann.

A2

Horizontalentfernung in Zentimetern	Höhe in Zentimetern
-8	0
0	15
20	50
40	85
60	100
80	125
100	130
125	148
150	150
175	148
200	130
220	125
240	100
260	85
280	50
308	0

A3 Die Abbildung zeigt die Messwerte im Koordinatensystem. Folgende Eigenschaften könnten die Schülerinnen und Schüler über Parabeln wissen und hierhin übertragen.

- Der Graph in der Skizze ist symmetrisch zur Geraden $x = 150$.
- Der höchste Punkt wird später der Scheitelpunkt der Parabel. Er ist nicht wie bei der Normalparabel im Koordinatenursprung, sondern 150 Zentimeter nach rechts und 150 Zentimeter nach oben verschoben.
- Der Graph steigt bis zu dem höchsten Punkt und fällt danach.



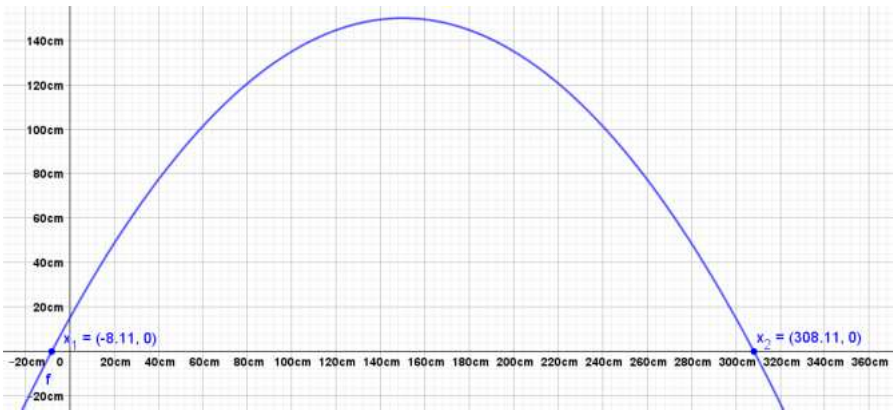
A4 Gesucht ist eine Funktion f mit der Form $f(x) = a(x-d)^2+e$, die den Wasserstrahl bestmöglich annähert. Als Scheitelpunkt der Parabel wird der höchste Punkt $(150 \mid 150)$ (siehe Abbildung in Teilaufgabe **A3**) genutzt. Der Parameter d verschiebt die Normalparabel in x-Richtung, in diesem Fall um 150 Zentimeter nach rechts, also $d = 150$. Der Parameter e verschiebt die Normalparabel in y-Richtung, in diesem Fall um 150 Zentimeter, also $e = 150$. $\Rightarrow$ $f(x) = a(x-150)^2+150$

Zur Bestimmung von a setzen wir den Punkt $(0, 15)$ ein und erhalten:

$$\begin{aligned} & f(x) &&= a(x-150)^2+150 \\ \Rightarrow\quad & 15 &&= a(0-150)^2+150 \\ \Rightarrow\quad & -135 &&= a\cdot 22500 \\ \Rightarrow\quad & a &&= \frac{-135}{22500} = 0,006 \end{aligned}$$

Die Funktion, die den Wasserstrahl gut annähert, ist f mit $f(x) = -0,006(x-150)^2+150$.

B1 Zur Bestimmung der Nullstellen müssen diejenigen x-Werte abgelesen werden, bei denen $f(x) = 0$ ist:



Rechnung: Gesucht sind diejenigen x, sodass $f(x) = 0$:

$$\begin{aligned} & f(x) = -0,006(x-150)^2+150 &&= 0 \\ \Leftrightarrow\quad & -0,006\cdot(x-150)^2 &&= -150 \\ \Leftrightarrow\quad & (x-150)^2 &&= 25000 \\ \Leftrightarrow\quad & x-150 &&= \pm\sqrt{25000} \\ \Leftrightarrow\quad & x &&= \pm\sqrt{25000}+150 \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$x_1 = 150 - \sqrt{25000} \approx 150 - 158,11 = -8,11$$

und

$$x_2 = 150 + \sqrt{25000} \approx 150 + 158,11 = 308,11$$

Die Nullstellen lauten $x_1 = -8,11$ Zentimeter und $x_2 = 308,11$ Zentimeter. Die erste Nullstelle beschreibt die Stelle, an der der Wasserstrahl aus dem Boden austritt, die zweite Nullstelle gibt an, wann der Wasserstrahl wieder auf der Höhe der Austrittsstelle ist. Die zweite Nullstelle markiert hier nicht die Stelle, an der der Wasserstrahl am Boden auftrifft, da das Auffangbecken eine Stufe tiefer liegt.

B2 Der höchste Punkt des Wasserstrahls ist der Scheitelpunkt der nach unten geöffneten Parabel. Dieser Punkt ist direkt an der Scheitelpunktform ($f(x) = -0,006(x-150)^2 + 150$) abzulesen. Der Scheitelpunkt lautet somit $(150, 150)$.
Alternativ kann man den Scheitelpunkt über die Koordinaten der Nullstellen berechnen, da die x-Koordinate des Scheitelpunktes genau zwischen den beiden Nullstellen liegt. Zwischen den beiden in Teilaufgabe **B1** bestimmten Nullstellen $x_1 = -8,11$ und $x_2 = 308,11$ liegt die x-Koordinate des Scheitelpunktes

$$x = 150 \quad \Rightarrow \quad f(x) = f(150) = -0,006(150-150)^2 + 150 = -0,006 \cdot 0 + 150 = 150$$

Der höchste Punkt des Wasserstrahls liegt bei $(150, 150)$.

C2 Der Parameter d verschiebt die Parabel in x-Richtung. Positive Werte für d verschieben nach rechts und negative nach links. Der Parameter e verschiebt die Normalparabel in y-Richtung. Positive Werte für e verschieben nach oben und negative nach unten. Der Parameter a streckt oder staucht die Parabel. Die Parabel, die einen Wasserstrahl darstellt, muss immer nach unten geöffnet sein. Der Wert für a muss daher immer negativ sein.

Didaktischer Kommentar

Dieser Mathematische Spaziergang kann am Ende der Sekundarstufe 1 bearbeitet werden und behandelt quadratische Funktionen. Diese beschreiben im Alltag zum Beispiel den Wasserstrahl eines Springbrunnens, der gleichzeitig nach oben und leicht zur Seite sprudelt.
Für diesen Spaziergang werden circa 90 Minuten und Schreibmaterial, Geodreieck und Maßband benötigt. Auch ein Taschenrechner für genaue Rechnungen soll dabei sein. Für Aufgabenteil **C** werden außerdem Wasserpistolen gebraucht, um den Einfluss der verschiedenen Parameter auf die Parabel zu sehen.
Für diese Aufgabe müssen die Schülerinnen und Schüler mit Parabeln vertraut sein. Der Brunnen wird nicht wie die Normalparabel verlaufen, also muss auch das Verschieben, Spiegeln, Strecken und Stauchen beherrscht werden, damit aus der Skizze eine Funktion in Scheitelpunktform bestimmt werden kann. In Aufgabenteil **B** wird außerdem nach den Nullstellen und dem Maximum der Funktion gefragt. Diese Themen sollten im Unterricht schon eingeführt worden sein, damit sie während des Spaziergangs geübt werden können. Mit den Wasserpistolen können die Schülerinnen und Schüler in Aufgabenteil **C** verschiedene Wasserstrahlen erzeugen und die Bedeutung der Parameter erfahren.