Brunnenspiele

Flächen- und Volumenberechnungen am Brunnen

Lösungsvorschlag

Hinweis: Diese Lösung wurde am Brunnen vor dem Sterntor (Münsterplatz/Bottlerplatz) in Bonn erstellt und stellt lediglich einen Lösungsvorschlag dar. Je nach Lernort weichen die Ergebnisse ab.

A1 Der Umfang des Brunnens beträgt 26,4 Meter. Der Durchmesser beträgt 8,4 Meter.

$$\frac{\text{Umfang}}{\text{Durchmesser}} = \frac{26,4\ \text{m}}{8,4\ \text{m}} \approx 3,14$$

Das Verhältnis von Umfang zu Durchmesser eines Kreises wird durch die Kreiszahl π beschrieben.

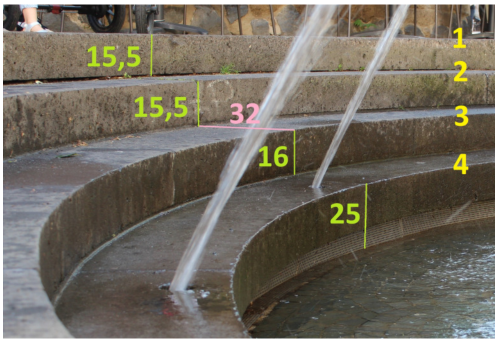
A2 Der Umfang der Brunnenöffnung beträgt 23,04 m. Daraus ergibt sich ein Radius von:

$$\text{Radius} = \frac{23,04\ \text{m}}{2\pi} \approx 3,67\ \text{m}$$

$$\text{Gitterfläche} = \pi \cdot (3,67\ \text{m})^2 \approx 42,31\ \text{m}^2$$

Die Gitterfläche muss 42,31 Quadratmeter groß sein.

A3 Das Innere des Brunnens kann in vier Zylinder unterteilt werden. Addieren wir die Volumina der Teilzylinder erhalten wir das Volumen des Brunnens. Die Radien der vier übereinanderliegenden kreisförmigen Grundflächen können durch Abmessen der Durchmesser bestimmt werden. Alternativ kann der Radius eines Kreises, der unter einem anderen Kreis K liegt auch berechnet werden, indem wir vom Radius des Kreises K die Länge einer Treppenstufe abziehen. Alle Treppen haben eine Länge von 32 Zentimetern.



Aus **A1** kennen wir bereits den Umfang der ersten Kreisscheibe, die die Grundfläche des ersten Zylinders bildet. Ihren Radius haben wir auch schon zuvor berechnet. Dieser beträgt 3,67 Meter. Die Höhe des betrachteten Zylinders beträgt 15,5 Zentimeter. Mit diesen Angaben können wir das Volumen des ersten Zylinders berechnen:
$V_1 = \pi \cdot (3,67\ \text{m})^2 \cdot 0,155\ \text{m} \approx 6,56\ \text{m}^3$

Zur Bestimmung des Radius der zweiten Kreisfläche ziehen wir nun die Länge der Treppenstufe vom bisherigen Radius ab und erhalten für den zweiten Zylinder einen Radius von 3,35 Metern. Daraus berechnen wir analog wie zuvor das Volumen des Zylinders. Insgesamt erhalten wir:

$$\begin{aligned} V_{\text{Brunnen}} &= 6,56\ \text{m}^3 + \pi \cdot\ (3,35\ \text{m})^2 \cdot\ 0,155\ \text{m} + \pi \cdot (3,03\ \text{m})^2 \cdot\ 0,16\ \text{m} \\ &+ \pi \cdot (2,71\ \text{m})^2 \cdot\ 0,25\ \text{m} \approx 22,41\ \text{m}^3 \end{aligned}$$

Der Brunnen hat ein Volumen von 22,41 Kubikmetern.

A4

$$1600\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\cdot 22,41\ \text{m}^3 = 35856\ \text{kg}$$

Es werden 35856 Kilogramm Sand benötigt. Das sind also etwa 35,86 Tonnen Sand. Der LKW muss mindestens zweimal beladen werden, um den Brunnen komplett mit Sand zu füllen.

A5 Es dauert lediglich 2 Sekunden bis eine 0,5-Liter-Flasche gefüllt ist. Im Brunnen befinden sich 12 Öffnungen, aus denen Wasser austritt.

$$\frac{0,5\ \text{L}}{2\ \text{s}}\cdot 60\frac{\text{s}}{\text{min}} = 15\frac{\text{L}}{\text{min}}$$

$$15\frac{\text{L}}{\text{min}}\cdot 12 = 180\frac{\text{L}}{\text{min}}$$

Pro Minute strömen aus allen Wasseröffnungen insgesamt 180 Liter Wasser in den Brunnen.

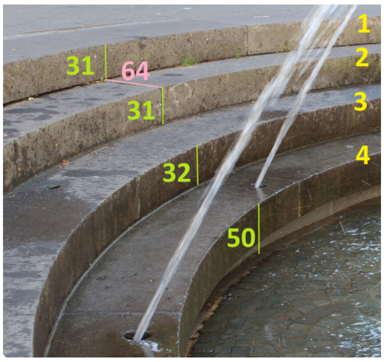
1 Liter entspricht 1 Kubikdezimeter. Das Volumen des Brunnens wandeln wir auch in dm^3 um: 22,41 m^3=22410 dm^3. Wir wissen bereits, dass pro Minute insgesamt 180 l (=dm^3) in den Brunnen strömen.

$$\frac{22410\ \text{dm}^3}{180\frac{\text{dm}^3}{\text{min}}} = 124,5\ \text{min}$$

Der Brunnnen wäre nach 124,5 Minuten, also nach 2 Stunden 4 Minuten und 30 Sekunden gefüllt.

B1 Alle Längen werden um 100% vergrößert und damit verdoppelt. Die Radien der vier Kreise betragen nun:

Radius(Kreis 1) $= 7,34$ m
Radius(Kreis 2) $= 6,7$ m
Radius(Kreis 3) $= 6,06$ m
Radius(Kreis 4) $= 5,42$ m



B2

$$\text{Gitterfläche} = \pi\cdot(7,34\ \text{m})^2 = 169,26\ \text{m}^2$$

$$V_{\text{Brunnen}} = \pi\cdot(7,34\ \text{m})^2\cdot 0,31\ \text{m} + \pi\cdot(6,7\ \text{m})^2\cdot 0,31\ \text{m} + \pi\cdot(6,06\ \text{m})^2\cdot 0,32\ \text{m} + \pi\cdot(5,42\ \text{m})^2\cdot 0,5\ \text{m} = 179,25\ \text{m}^3$$

Die Gitterfläche des neuen Brunnenmodells beträgt 169,26 Quadratmeter und das Volumen 179,25 Kubikmeter.

B3

	Radius Kreis 1	Gitterfläche	Volumen(Brunnen)
Modell 1	3,67 m	42,31 m^2	22,41 m^3
Modell 2	7,34 m	169,26 m^2	179,25 m^3
Verhältnis ($\frac{\text{Modell 2}}{\text{Modell 1}}$)	2	4	8

Kleine Abweichungen sind den Rundungen geschuldet. Vergleicht man die Verhältnisse der jeweiligen Größen, so lässt sich erkennen, dass die Längen, die Fläche und das Volumen um unterschiedliche Faktoren zunehmen. Bei Vergrößerung der Längen um Faktor 2 wächst die Fläche um den Faktor $2^2 = 4$ und das Volumen um den Faktor $2^3 = 8$, also allgemein: Bei einer Vergrößerung der Längen um den Faktor k, wächst die Fläche (zweidimensonal) um den Faktor k^2 und das Volumen (dreidimensional) um den Faktor k^3.

Didaktischer Kommentar

Dieser Mathematische Spaziergang richtet sich an Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe 1. Inhaltlich vorausgesetzt wird das Wissen zur Berechnung von Umfang und Flächeninhalt von Kreisen und insbesondere die Kreiszahl π. Dieses Thema sollte also vor dem Spaziergang behandelt worden sein.

Im Mittelpunkt der Aufgabe steht die Berechnung von Volumina. Je nach Aussehen des Brunnens variiert der Schwierigkeitsgrad. Im Idealfall sollte der Brunnen aus einfachen zusammengesetzten Körpern bestehen, sodass sich die Schülerinnen und Schüler das Volumen mit bekannten Formeln erschließen können. Um eine möglichst gute Vergleichbarkeit mit dem Lösungsvorschlag zu garantieren, sollte der Brunnen im Inneren stufenförmig (bestehend aus mehreren Zylindern) aufgebaut sein.

Die Schülerinnen und Schülern benötigen zur Bearbeitung der Aufgabe Schreibmaterial, einen Zollstock, einen Taschenrechner, eine 0,5-Liter-Flasche, eine Stoppuhr und eine Schnur. Die Bearbeitungszeit der Aufgabe beträgt circa 45 Minuten. Die Aufgabe soll bevorzugt in Kleingruppen von drei bis vier Personen bearbeitet werden.

Zu beachten ist, dass einige Brunnen im Winter geschlossen sind.