UNIVERSITÄT BONN MATHEMATISCHE SPAZIERGÄNGE

Sekundarstufe I
Analysis und Geometrie

- Trigonometrische Funktionen
- Berechnungen am Dreieck

Material
Schreibmaterial, Taschenrechner, geometrisches Quadrat, Maßband (50 Meter), Kreide

Zeit
90 Minuten

Lernort
Hohes Gebäude (möglichst freistehend, mit genügend Platz für Messungen)

Vorbereitung in der Schule
Auf unserer Homepage findet ihr die Bauanleitung für das geometrische Quadrat. Dieses sollte vorab im Unterricht angefertigt werden.

Das geometrische Quadrat im Einsatz

Mit Trigonometrie Höhen bestimmen

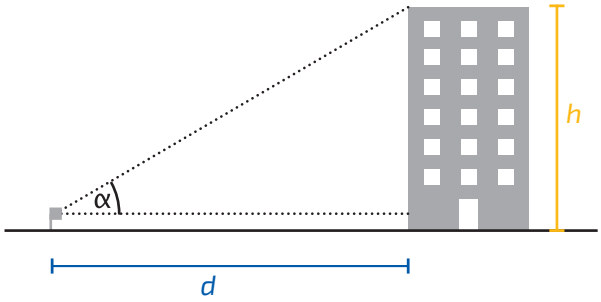
Hast du dich schon einmal gefragt, wie die Menschen früher Strecken ausgemessen haben, als es noch keine moderne Technik gab? Ein nützliches Hilfsmittel war das geometrische Quadrat, welches bereits im 15. Jahrhundert zur Vermessung von Objekten verwendet wurde. Anwendung fand es vor allem bei der Bestimmung von Streckenlängen (meist Höhen) zwischen verschiedenen Vermessungspunkten, die nicht oder nur schwer zugänglich waren. Grundsätzlich wird mithilfe des geometrischen Quadrates ein zum realen Vermessungsdreieck ähnliches Dreieck erzeugt und anschließend der Höhenwinkel am Gerät abgelesen.

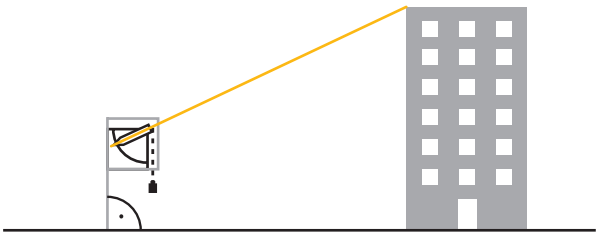
In der folgenden Aufgabe wirst du selbst in die Rolle eines Geodäten oder einer Geodätin (griechisch: Landvermesser / Landvermesserin) schlüpfen und dein geometrisches Quadrat nutzen, um die Höhe des Gebäudes zu ermitteln.

A1 Schätze die Höhe des Gebäudes und beschreibe, wie du zu deiner Schätzung gekommen bist.

Im Folgenden werdet ihr die Höhe *h* des Gebäudes mit dem geometrischen Quadrat bestimmen.

A2 Arbeitet in Dreiergruppen und setzt euer geometrisches Quadrat folgendermaßen auf: Richtet das Messinstrument in einiger Entfernung zum Gebäude so aus, dass die Schnur des Gewichtes parallel zur Außenkante der Skala über der vorgegebenen gestrichelten Linie hängt. Das geometrische Quadrat steht dann senkrecht zum Boden und ihr könnt mit der Winkelmessung beginnen. Dazu muss einer von euch mit seinem Auge von der Pfeilspitze des Visierlineals aus über die obere Kante des Strohhalms schauen und das Visierlineal so ausrichten, dass die obere Kante des Gebäudes anvisiert wird. Auf dem





Bilder: links – lizenzfreies Foto | rechts – Volker Lannert

geometrischen Quadrat kann dann der gemessene Winkel abgelesen werden.

Bestimmt nun so den in der Abbildung eingezeichneten Höhenwinkel α und gebt ihn an.

A3 Miss die Länge der Strecke *d*, die die Entfernung zwischen geometrischem Quadrat und Gebäude darstellt und notiere diese in deinem Heft. Markiere die Stelle, auf der das geometrische Quadrat aufgesetzt wurde, mit der Kreide.

A4 Finde unter Verwendung der Winkelfunktionen eine Formel, um aus den gemessenen Strecken die Höhe des Gebäudes zu bestimmen. Berechne anschließend die Höhe und gib sie an.

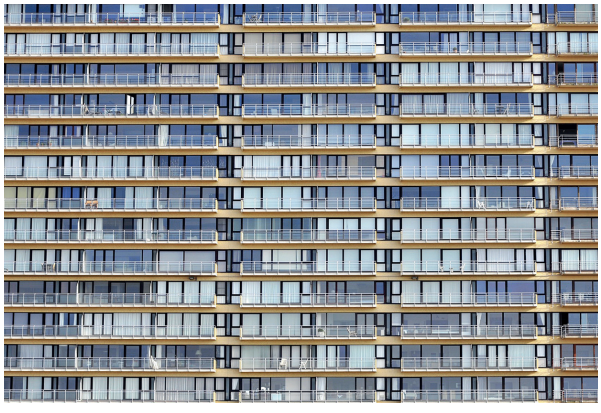
In diesem Aufgabenteil lernst du eine alternative Vorgehensweise kennen, um die Höhe deines Gebäudes zu bestimmen. Diese verwendet die folgende Aussage des Sinussatzes:

Seien a, b, c die Seitenlängen eines Dreiecks und α, β, γ die gegenüberliegenden Winkel. Dann gilt der folgende Zusammenhang:

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

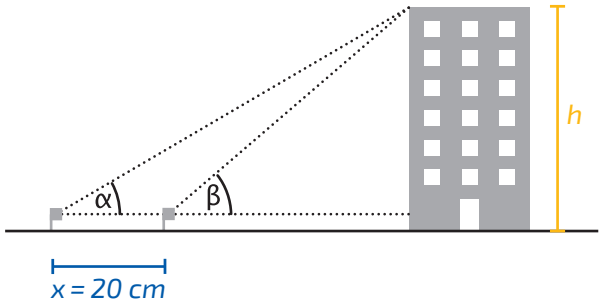
B1 Schätze die Höhe des Gebäudes nun erneut, aber systematischer: Kannst du Etagen oder ähnliches zählen und damit die Höhe genauer schätzen? Wie groß ist die Abweichung zu dem berechneten Ergebnis aus Teilaufgabe **A4**? Wie kannst du dir die Abweichung erklären?

B2 Bildet Dreiergruppen und geht von dem in Teilaufgabe **A3** markierten Standpunkt zwanzig Meter auf das Gebäude zu. Stellt an diesem



Punkt euer geometrisches Quadrat erneut auf und bestimmt den Höhenwinkel β.

Hinweis: *Die folgende Abbildung kann euch helfen.*

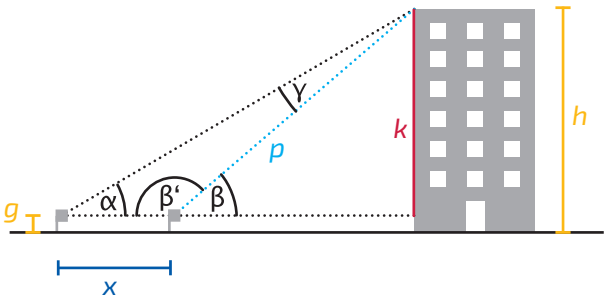


B3 Zeige, dass sich die Höhe des Gebäudes mit folgender Formel berechnen lässt:

$$h = \frac{x \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)}{\sin(\beta - \alpha)} + g$$

Dabei beschreibt *g* die Höhe, in der das geometrische Quadrat gehalten wird.

Hinweis: *Die folgende Abbildung und die Anmerkungen zur Vorgehensweise können dir helfen.*



Bilder: unten – lizenzfreies Foto | oben links – Volker Lannert | oben rechts – Projektteam

Mache dir bewusst, welche der in der Abbildung eingezeichneten Größen du bereits kennst.

Schritt 1: Berechne den Winkel β'.

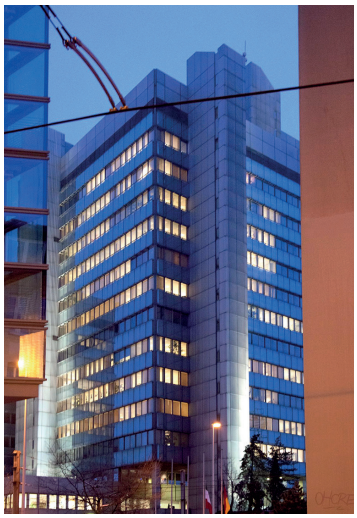
Schritt 2: Berechne den Winkel γ in Abhängigkeit von den Winkeln α und β.

Schritt 3: Berechne p mithilfe des Sinussatzes.

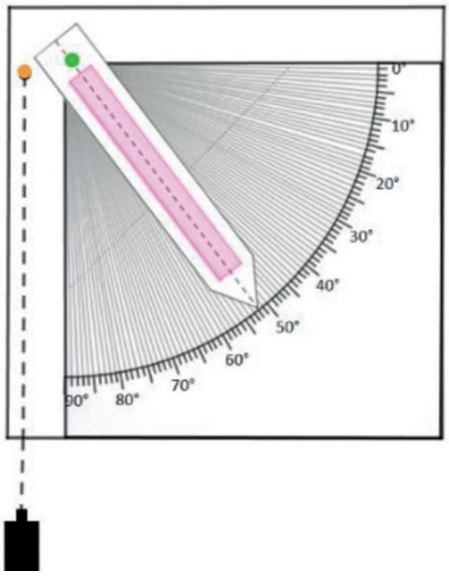
Schritt 4: Berechne schließlich h.

Berechne anschließend mit dieser Formel die Höhe des Gebäudes.

Hinweis: *Du kannst die Schritte 1 bis 4 auch erst einmal mit den echten Zahlenwerten durchführen und es anschließend mit der Herleitung der Formel versuchen.*



B4 Wie bewertest du dieses Ergebnis im Vergleich zu dem, welches du in Teilaufgabe **A4** berechnet hast? Vergleiche die beiden Vorgehensweisen zur Bestimmung der Höhe des Gebäudes und überlege, welche Gründe in besonderem Maße zu der Ungenauigkeit des Ergebnisses beigetragen haben.



Unterstützt durch:
hausdorff CENTER FOR MATHEMATICS
JOACHIM HERZ STIFTUNG

Bilder: Volker Lannert